

A-7 Teilbarkeit und partielle Ordnungen

Lemma A.70 (Eigenschaften der Teilbarkeit)

Für $a, b, c \in \mathcal{M} = \mathbb{N}$ gilt:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------|
| (i) $a b \wedge b c \implies a c$ | Transitivität |
| (ii) $a b \wedge b a \implies a = b$ | Antisymmetrie |
| (iii) $a a$ | Reflexivität |

Bemerkung:

Offenbar folgt aus $a|b$ daß $a \leq b$.

Die Umkehrung gilt aber nicht da z.B. weder $3|7$ noch $7|3$.

Teilbarkeit repräsentiert eine partielle Ordnung im Sinne der folgenden Definition.



Definition A.71 (Ordnungsrelation)

- (i) Die durch eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, definierte Beziehung
 $a < b \iff b > a \iff (a, b) \in \mathcal{R}$,

heißt **Ordnungsrelation** falls

$a < b \wedge b < c \implies a < c$	Transitivität
$a < b \wedge b < a \implies a = b$	Antisymmetrie

- (ii) Die Ordnungsrelation heißt **streng** falls für alle $a \in \mathcal{M}$ die folgenden äquivalenten Aussagen gelten

$$a \not< a \iff \neg(a < a).$$

Dann wird durch

$$a \preceq b \iff a < b \vee a = b$$

eine **reflexive** Ordnungsrelation definiert, so daß $a \preceq a$ für alle $a \in \mathcal{M}$. Umgekehrt ergibt sich strenge Ordnung durch

$$a < b \iff a \preceq b \wedge a \neq b$$

- (iii) Die Relation heißt **vollständig** oder eine **Wohlordnung** von \mathcal{M} , falls für alle $a, b \in \mathcal{M}$ gilt

$$a < b \vee b < a \vee a = b.$$

Nicht vollständige Ordnungen heißen **partiell**.



Beispiel A.72

Die übliche *Kleiner*-Relation $<$ in \mathbb{R} und Untermengen ist eine strenge Ordnung und \leq die entsprechende reflexive Variante. Beide sind vollständig.

Beispiel A.73

Koordinatenvektoren (x, y) in Ebene werden durch

$$a = (x_1, y_1) \leq b = (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

partiell geordnet.

Beispiel A.74

Die Enthaltenenseinsbeziehung von Mengen

$$\mathcal{M} < \mathcal{N} \iff \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$$

ist eine partielle nichtstrenge, d.h. reflexive Ordnung.



Definition A.75

Das Alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ ist vollständig geordnet durch Reihenfolge der Buchstaben in obiger Auflistung der Menge \mathcal{A} , z.B. $c < x$. Diese Ordnung kann erweitert werden zur **lexikographische Ordnung** auf der Menge \mathcal{A}^* aller Worte, die aus dem Alphabet \mathcal{A} gebildet werden können.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) < (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

gilt genau dann wenn ein $k \leq \min(m, n)$ existiert so daß

$$a_i = b_i \text{ für } i \leq k \quad \text{und} \quad (a_{k+1} < b_{k+1} \text{ oder } k = n < m).$$

Beispiel A.76 (Telefonbuch)

... griewank < grünewald < ... < meier < meiers < ...



Graphische Interpretation:

Betrachte die Elemente einer Menge \mathcal{M} mit strenger Ordnung \prec als Knoten eines Graphen mit der Kantenmenge \mathcal{K} . Zwei Knoten $a, b \in \mathcal{M}$ werden durch eine gerichtete Kante $(a, b) \in \mathcal{K}$ verbunden wenn a bzgl. der Ordnung \prec vor b kommt und kein Knoten c dazwischen liegt, d.h.

$$(a, b) \in \mathcal{K} \iff a \prec b \wedge a \neq b \wedge (a \prec c \prec b \implies c = a \vee c = b).$$

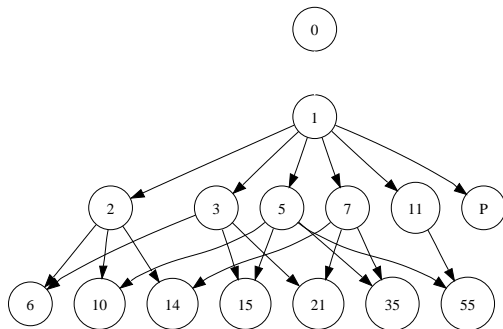
Dann erhalten wir einen

DAG \equiv Directed Acyclic Graph.

Dieser lässt sich immer so zeichnen daß alle Kanten eine negative vertikale Komponente haben.

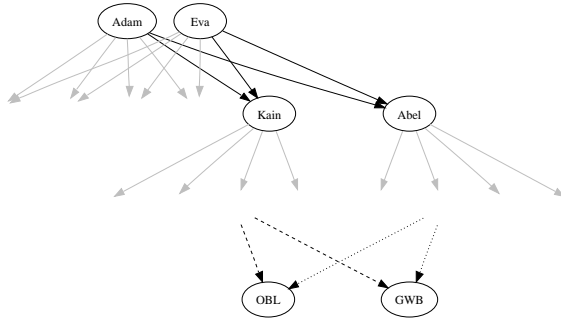


Beispiel A.77 (Teilbarkeit in \mathbb{N})



Beispiel A.78 (Stammbaum der Menschheit)

$a \prec b$ bedeutet: a ist Vorfahre von b
 (a, b) bedeutet: b ist Kind von a , es gibt eine Kante von a zu b im DAG.



Bemerkung:

Im Stammbaum der Menschheit ist die Frage zweier Personen: „Wer war unser letzter gemeinsamer Vorfahre?“ im allgemeinen nicht eindeutig beantwortbar.

Theoretisch könnten z.B. sowohl Adam wie auch Eva letzte gemeinsame Vorfahren sein.

Diese Möglichkeit wird in *Verbände* genannten partiellen Ordnungen ausgeschlossen.

