Satz A.105 (Lagrange - Interpolation)

Sei $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ oder ein anderer Körper. Dann gilt:

(i) *Es existiert zu jeder Familie von Wertepaaren*

$$(x_i, y_i) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots, n$$

mit unterschiedlichen "Abzissenwerten"

$$x_i \neq x_j \quad \text{für } i \neq j$$

ein Interpolationspolynom $P(x)$ vom Grad $\leq n$, so daß

$$P(x_i) = y_i \qquad \text{für } i = 0, 1, \ldots, n.$$

(ii) *Dieses Polynom ist eindeutig und läßt sich darstellen als*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \underbrace{\frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}}_{\equiv P_i(x)}$$

(iii) *Insbesondere folgt aus $y_i = 0$ für $i = 0, \ldots, n$, dass alle Koeffizienten c_i in $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ verschwinden, d.h. es gilt*

$$c_i = 0 \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n.$$

Beweis:

(i) Die Existenz folgt aus der Gültigkeit der Darstellung (ii), welche zunächst geprüft wird. Die Ausdrücke

$$P_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n$$

sind genau so definiert, daß

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Deshalb gilt wie erwünscht

$$P(x_j) = \sum_{j=0}^{n} y_i P_i(x_j) = y_j.$$

Außerdem kann man durch Ausmultiplizieren feststellen, daß die höchste Potenz von $P_i(x)$ jeweils gegeben ist durch den Term

$$x^n / \prod_{j \neq i} (x_i - x_j).$$

Also ist P tatsächlich ein Polynom vom Grad $\deg(P) \leq n$. In speziellen Fällen können sich die höchsten Terme aufheben so dass $\deg(P) < n$.

(ii) Ergibt sich aus (iii) wie folgt. Falls die Polynome

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j \quad \text{und} \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{n} q_j x^j$$

beide die Paare (x_j, y_j) interpolieren, so gilt für ihre Differenz

$$R(x) = \sum_{j=0}^{n} (p_j - q_j) x^j = P(x) - Q(x)$$

insbesondere

$$R(x_j) = P(x_j) - Q(x_j) = y_j - y_j = 0 \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n.$$

Also folgt aus der letzten Aussage (iii) dass

$$p_j - q_j = 0 \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n.$$

und damit die behauptete Eindeutigkeit.

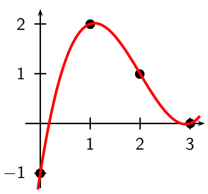
(iii) Beweis folgt später (mittels Polynomdivision)

□

Beispiel – Lagrangepolynom

x_i	0	1	2	3
y_i	-1	2	1	0

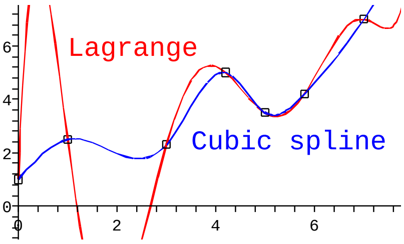
$$\begin{aligned} P(x) \quad = \quad & -1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \\ & + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ & + 1 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\ & + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \end{aligned}$$



$$\mathbf{P(x) \;=\; \frac{2}{3}\, x^3 \;-\; 4\, x^2 \;+\; \frac{19}{3}\, x \;-\; 1}$$

Warnung:

Interpolationspolynome höherer Ordnung können zwischen den vorgegebenen Datenpunkten *sehr stark oszillieren*, deshalb wendet man in der Numerik lieber aus Polynomen niederer Ordnung zusammengesetzte Funktionsmodelle an. $\Longrightarrow$ Cubic Splines, Finite Elemente.



Beobachtung zur Nullstellenberechnung

Wie bei Funktionen allgemein ergibt sich auch bei Polynomen häufig die Aufgabe deren **Nullstellen** x_j für $j = 1, 2, \ldots, m$ zu bestimmen. D.h. man sucht die Werte $x = x_j$, die die folgende Gleichung lösen:

$$P(x) = 0$$

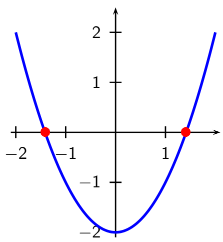
Die Nullstellen von Polynomen werden auch deren **Wurzeln** genannt. Wie wir später sehen werden, kann ein Polynom $P(x)$ über einem Körper nur $m \leq n = deg(P)$ unterschiedliche Wurzeln haben.

Beispiel A.106

$$P(x) = x^2 - 2 = 0$$

hat die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Beide Werte sind **irrational**, d.h.sie gehören nicht zum Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
Ihre Berechnung gelingt deshalb immer nur annäherungsweise, was eigentlich das Verständnis der reellen bzw. komplexen Zahlen verlangt.
Vorerst benutzen wir nur die folgende Verallgemeinerung.



Definition A.107 (Radikale)

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ und jede positive reelle Zahl $a > 0$ hat die Gleichung

$$P(x) = x^n - a = 0$$

genau eine mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnete positive Wurzel,die **Radikal** genannt wird.

Bemerkung

Da man Radikale zu verstehen glaubte, hat man jahrhundertelang versucht die Wurzeln allgemeiner Polynome durch sie auszudrücken. Das gelingt zum Beispiel im quadratischen Fall $n = 2$ wie folgt.

Lemma A.108 (Lösung einer quadratischen Gleichung)

Das Polynom

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad \textit{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

hat im Falle $\gamma\alpha \le \frac{1}{4}\beta^2$ *die reellen Wurzeln*

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha\gamma/\beta^2}\right]$$

Lemma A.109 (Explizite Lösung einer kubischen Gleichung)

Das kubische Polynom

$$P(x) = x^3 + \gamma x + \delta \qquad \textit{mit} \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

immer mindestens eine reele Lösung, die sich im Falle $\gamma \ge -3\sqrt[3]{\frac{1}{4}\delta^2}$ *nach der* **Cardanschen Formel** *ausdrücken lässt als*

$$x_1 \;=\; u_+ + u_- \quad \textit{mit} \quad u_\pm \;=\; \sqrt[3]{-\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{3}\right)^3 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}}$$

Weitere Nullstellen lassen sich dann als Lösung einer quadratischen Gleichung nach der später diskutierten *Abspaltung eines Linearfaktors* berechnen.

Bemerkung

Die obige Aussage setzt voraus, dass der führende, kubische Koeffizient gleich eins ist und der quadratische Koeffizient verschwindet. Diese Normalform lässt sich für ein allgemeines kubisches Polynom

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

immer durch folgende Transformation erreichen:

Zunächst dividiert man alle vier Terme des Polynomes durch α. Dann wird x durch $\tilde{x} - \beta/(3 * \alpha)$ ersetzt, wodurch der quadratische Term wegfällt. Von den für $\tilde{x}$ erhaltenen Lösungen muss dann am Ende jeweils $\beta/(3 * \alpha)$ abgezogen werden, um die entsprechende Nullstelle von x für die Ausgangsgleichung zu erhalten.

Schlussbemerkung zur Nullstellensuche

Während es auch für Gleichungen 4. Ordnung noch explizite Lösungsformeln gibt, zeigte der geniale norwegische Mathematiker Abel mit algebraischen Methoden, dass die Wurzeln von Polynomen vom Grad $n \ge 5$ sich im allgemeinen nicht mehr durch Radikale ausdrücken lassen.

Aus heutiger Sicht ist die Suche nach solchen, nur theoretisch expliziten Audrücken sowieso für praktische Berechnungen nutzlos. Schon die Cardanschen Formeln kommen selten zur Anwendung, da die Anwendung der Newton-Methode zur iterativen Berechnung von Nullstellen im allgemeinen einfacher, effizienter und häufig sogar genauer ist.

Schon die Auswertung der Radikale $\sqrt[n]{a}$ erfolgt auf modernen Rechnern mit der Newton-Methode. Letztlich geht es meistens nicht darum die Wurzeln eines einzelnen Polynomes zu bestimmen, sondern mehrere nichtlineare Gleichungen in mehreren Variablen simultan zu lösen.