

Basistransformation

Umrechnung eines Vektors auf eine neue Basis

Ausgangspunkt

Gegeben sei eine Basis $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1 \dots n}$ des linearen Vektorraumes \mathcal{V} . Mittels des *Gram-Schmidtschen* - Orthogonalisierungsverfahrens sei eine neue **orthonormale Basis** $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$ erzeugt worden. Die dabei erzeugten Zwischengrößen $\tilde{\mathbf{b}}_i$, $i = 1 \dots n$, und α_{ij} , $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots (i - 1)$, seien verfügbar.

Ziel

Es soll eine Formel ermittelt werden, mit deren Hilfe jeder bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1 \dots n}$ gegebene Vektor $\mathbf{u}_{[v]} \in \mathcal{V}$ in eine Darstellung $\mathbf{u}_{[b]}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$ umgewandelt werden kann.

Verfahren

Der Ansatz des *Gram-Schmidtschen*-Orthogonalisierungsverfahrens

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{b}_j \quad i = 1, \dots, n$$

kann nach \mathbf{v}_i umgestellt werden. Mit $\mathbf{b}_i = \tilde{\mathbf{b}}_i / \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|$ erhält man

$$\mathbf{v}_i = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\| \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{b}_j \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit dem Übergang von α_{ij} zu $\tilde{\alpha}_{ij} = -\alpha_{ij}$, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots i - 1$, und durch zusätzliche Einführung von $\tilde{\alpha}_{ii} = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|$, $i = 1 \dots n$, folgt

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\alpha}_{ii} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\alpha}_{ij} \mathbf{b}_j = \boxed{\sum_{j=1}^i \tilde{\alpha}_{ij} \mathbf{b}_j = \mathbf{v}_i} \quad i = 1, \dots, n.$$

Damit hat man eine Darstellung der Basisvektoren \mathbf{v}_i , $i = 1 \dots n$, als Linearkombination der neuen Basisvektoren \mathbf{b}_i .

Ersetzt man nun die Basisvektoren \mathbf{v}_i in einem gegebenen Vektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{[v]} = (\mu_1, \dots, \mu_n)_{[v]}^T = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{v}_i$$

durch die neue Basis $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$ erhält man

$$\mathbf{u}_{[v]} = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^i \tilde{\alpha}_{ij} \mathbf{b}_j = \boxed{\sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{j=1}^i \tilde{\alpha}_{ij} \mathbf{b}_j = \mathbf{u}_{[b]}}$$

also die gesuchte Formel zur Darstellung $\mathbf{u}_{[b]}$ des Vektors \mathbf{u} bezüglich der Basis $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$.

Beispiel

Alte Basis ($n = 3$):

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T \quad \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)^T$$

Gegebener Vektor bezüglich Basis $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1 \dots 3}$:

$$\mathbf{u}_{[v]} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)_{[v]}^T = (1, -2, \frac{1}{2})_{[v]}^T$$

Neue Basis aus *Gram-Schmidt*:

$$\mathbf{b}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T \quad \mathbf{b}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3})^T \quad \mathbf{b}_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$$

Koeffizienten α_{ij} aus *Gram-Schmidt*:

$$\alpha_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha_{31} = -\sqrt{2} \quad \alpha_{32} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Neue Koeffizienten

$$\tilde{\alpha}_{ij} = -\alpha_{ij}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots i - 1, \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}_{ii} = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|, \quad i = 1 \dots n:$$

$$\tilde{\alpha}_{11} = 2\sqrt{2} \quad \tilde{\alpha}_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tilde{\alpha}_{22} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \tilde{\alpha}_{31} = \sqrt{2} \quad \tilde{\alpha}_{32} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \tilde{\alpha}_{33} = \frac{5}{3}$$

Nun **Umrechnung** auf neue Basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathbf{b}} &= \sum_{i=1}^3 \mu_i \sum_{j=1}^i \tilde{\alpha}_{ij} \mathbf{b}_j \\ &= \mu_1 \tilde{\alpha}_{11} \mathbf{b}_1 + \mu_1 (\tilde{\alpha}_{21} \mathbf{b}_1 + \tilde{\alpha}_{22} \mathbf{b}_2) + \mu_3 (\tilde{\alpha}_{31} \mathbf{b}_1 + \tilde{\alpha}_{32} \mathbf{b}_2 + \tilde{\alpha}_{33} \mathbf{b}_3) \\ &= \underbrace{(\mu_1 \tilde{\alpha}_{11} + \mu_2 \tilde{\alpha}_{21} + \mu_3 \tilde{\alpha}_{31})}_{2\sqrt{2} - 2\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \mathbf{b}_1 + \underbrace{(\mu_2 \tilde{\alpha}_{22} + \mu_3 \tilde{\alpha}_{32})}_{-2\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}} \mathbf{b}_2 + \underbrace{\mu_3 \tilde{\alpha}_{33}}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}} \mathbf{b}_3 \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad = -3\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2} \quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \\ \beta_1 &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \beta_2 = -\frac{17}{6}\sqrt{2} \quad \beta_3 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{u}_{[\mathbf{v}]} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)_{[\mathbf{v}]}^T = (1, -2, \frac{1}{2})_{[\mathbf{v}]}^T = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{17}{6}\sqrt{2}, \frac{5}{6} \right)_{[\mathbf{b}]}^T = \mathbf{u}_{[\mathbf{b}]} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{[\mathbf{b}]}^T$$

Probe: Umrechnung in kartesische Koordinaten

$$\mathbf{u}_{[\mathbf{v}]} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \mathbf{v}_i = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+0 \\ 2-0+1 \\ 0-4+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{[\mathbf{b}]} &= \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{b}_i = \frac{3\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{17}{6}\sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{34}{36} - \frac{10}{18} \\ \frac{3}{2} + \frac{34}{36} + \frac{10}{18} \\ 0 - \frac{68}{18} - \frac{5}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{27}{18} \\ \frac{3}{2} + \frac{27}{18} \\ 0 - \frac{63}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ 0 - \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{u}_{[\mathbf{v}]} = \mathbf{u}_{[\mathbf{b}]} = \mathbf{u}.$$