

## Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

### Ausgangspunkt

Gegeben sei eine Basis  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1 \dots n}$  des linearen Vektorraumes  $\mathcal{V}$ .

### Ziel

Mittels des *Gram-Schmidtschen* - Orthogonalisierungsverfahrens soll eine neue **orthonormale Basis**  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$  des Vektorraumes  $\mathcal{V}$  erzeugt werden.

Damit gilt (für festes  $i$ )

$$0 = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{v}_i + \alpha_{ij} \quad j = 1 \dots i-1$$

und somit

$$\alpha_{ij} = -\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{v}_i \quad j = 1 \dots i-1.$$

Dann wird  $\tilde{\mathbf{b}}_i$  entsprechend dem Ansatz

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{b}_j$$

berechnet. Schließlich erhält man den  $i$ -ten neuen Basisvektor aus

$$\mathbf{b}_i = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_i}{\|\tilde{\mathbf{b}}_i\|}.$$

Die letzten drei Gleichungen sind für  $i = 1 \dots n$  zu lösen, danach ist die neue Basis berechnet.

## Verfahren

**Gegeben:**  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1 \dots n}$  Basis von  $\mathcal{V}$

**Gesucht:**  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1 \dots n}$  **orthonormale Basis** von  $\mathcal{V}$  so dass

$$\text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \quad i = 1, \dots, n$$

sowie

$$\|\mathbf{b}_i\| = 1 \wedge \mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j \quad 1 \leq \{i, j\} \leq n, j \neq i$$

**Ansatz:** Wegen der Forderung

$$\mathbf{b}_i \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{v}_i)$$

wählt man den Ansatz

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{b}_j = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\| \mathbf{b}_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Da  $\mathbf{b}_j$  durch Normalisierung aus  $\tilde{\mathbf{b}}_j$  gebildet wird, ist auch  $\tilde{\mathbf{b}}_i$  orthogonal zu allen Vektoren  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 1 \dots i-1$ .

## Beispiel

Gegebene Basis ( $n = 3$ ):

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T \quad \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)^T$$

$i = 1$ :

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T$$

$$\|\tilde{\mathbf{b}}_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1}{\|\tilde{\mathbf{b}}_1\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, 2, 0)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T = \mathbf{b}_1$$

$i = 2$ :

$$\alpha_{21} = -\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \cdot (1, 0, 2)^T = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{v}_2 + \alpha_{21} \mathbf{b}_1 = (1, 0, 2)^T - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)^T$$

$$\|\tilde{\mathbf{b}}_2\| = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_2}{\|\tilde{\mathbf{b}}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)^T = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^T = \mathbf{b}_2$$

$i = 3$ :

$$\alpha_{31} = -\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \cdot (0, 2, 1)^T = -\sqrt{2}$$

$$\alpha_{32} = -\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^T \cdot (0, 2, 1)^T = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_3 &= \mathbf{v}_3 + \alpha_{31}\mathbf{b}_1 + \alpha_{32}\mathbf{b}_2 = (0, 2, 1)^T - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T - \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^T \\ &= \left(-\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)^T\end{aligned}$$

$$\|\tilde{\mathbf{b}}_3\| = \sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{81}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_3}{\|\tilde{\mathbf{b}}_3\|} = \frac{3}{5}\left(-\frac{10}{9}, \frac{10}{9}, \frac{5}{9}\right)^T = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T = \mathbf{b}_3$$

Die somit berechnete neue Basis ist

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T \quad \mathbf{b}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^T \quad \mathbf{b}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

## Grafik aus der Vorlesung vom 25.1.2005

Gegebene Basis:

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T$$

$$\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T$$

$$\mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)^T$$

Orthonormale Basis:

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$$

$$\mathbf{b}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^T$$

$$\mathbf{b}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

