Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

Ausgangspunkt

Gegeben sei eine Basis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots n}$ des linearen Vektorraumes $\mathcal{V}$.

Ziel

Mittels des *Gram-Schmidtschen* - Orthogonalisierungsverfahrens soll eine neue **orthonormale Basis** $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1\ldots n}$ des Vektorraumes $\mathcal{V}$ erzeugt werden.

Verfahren

Gegeben: $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots n}$ Basis von $\mathcal{V}$

Gesucht:$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1\ldots n}$ **orthonormale Basis** von $\mathcal{V}$ so dass

$$\mathbf{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = \mathbf{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \qquad i = 1, \ldots, n$$

sowie

$$\|\mathbf{b}_i\| = 1 \ \wedge \ \mathbf{b}_i \perp \mathbf{b}_j \qquad 1 \leq \{i, j\} \leq n, j \neq i$$

Ansatz: Wegen der Forderung

$$\mathbf{b}_i \in \mathbf{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i) = \mathbf{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{v}_i)$$

wählt man den Ansatz

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{b}_j = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\| \, \mathbf{b}_i \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Da $\mathbf{b}_i$ durch Normalisierung aus $\tilde{\mathbf{b}}_i$ gebildet wird, ist auch $\tilde{\mathbf{b}}_i$ orthogonal zu allen Vektoren $\mathbf{b}_j$, $j = 1 \ldots i-1$.

Damit gilt (für festes i)

$$0 = \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{v}_i + \alpha_{ij} \qquad j = 1 \ldots i-1$$

und somit

$$\alpha_{ij} = -\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{v}_i \qquad j = 1 \ldots i-1\,.$$

Dann wird $\tilde{\mathbf{b}}_i$ entsprechend dem Ansatz

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{b}_j$$

berechnet. Schließlich erhält man den i-ten neuen Basisvektor aus

$$\mathbf{b}_i = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_i}{\|\tilde{\mathbf{b}}_i\|}\,.$$

Die letzten drei Gleichungen sind für $i = 1 \ldots n$ zu lösen, danach ist die neue Basis berechnet.

Beispiel

Gegebene Basis ($n = 3$):

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T \qquad \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)^T$$

$\mathbf{i = 1}$:

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T$$

$$\|\tilde{\mathbf{b}}_1\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_1}{\|\tilde{\mathbf{b}}_1\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, 2, 0)^T = \boxed{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T = \mathbf{b}_1}$$

$\mathbf{i = 2}$:

$$\alpha_{21} = -\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T \cdot (1, 0, 2)^T = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{v}_2 + \alpha_{21}\mathbf{b}_1 = (1, 0, 2)^T - \frac{1}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 2)^T$$

$$\|\tilde{\mathbf{b}}_2\| = \sqrt{\tfrac{1}{2}^2 + \tfrac{1}{2}^2 + 2^2} = \sqrt{\tfrac{9}{2}} = \tfrac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{b}_2 = \tfrac{\tilde{\mathbf{b}}_2}{\|\tilde{\mathbf{b}}_2\|} = \tfrac{\sqrt{2}}{3}(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 2)^T = \boxed{(\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6}, 2\tfrac{\sqrt{2}}{3})^T = \mathbf{b}_2}$$

i = 3:

$$\alpha_{31} = -\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = -(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T \cdot (0,2,1)^T = -\sqrt{2}$$

$$\alpha_{32} = -\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = -(\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6}, 2\tfrac{\sqrt{2}}{3})^T \cdot (0,2,1)^T = \tfrac{\sqrt{2}}{3} - \tfrac{2\sqrt{2}}{3} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{v}_3 + \alpha_{31}\mathbf{b}_1 + \alpha_{32}\mathbf{b}_2 = (0,2,1)^T - \sqrt{2}\,(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,(\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6}, 2\tfrac{\sqrt{2}}{3})^T$$

$$= (-\tfrac{10}{9}, \tfrac{10}{9}, \tfrac{5}{9})^T$$

$$\|\tilde{\mathbf{b}}_3\| = \sqrt{(\tfrac{10}{9})^2 + (\tfrac{10}{9})^2 + (\tfrac{5}{9})^2} = \sqrt{\tfrac{225}{81}} = \tfrac{15}{9} = \tfrac{5}{3}$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}_3}{\|\tilde{\mathbf{b}}_3\|} = \tfrac{3}{5}\,(-\tfrac{10}{9}, \tfrac{10}{9}, \tfrac{5}{9})^T = \boxed{(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})^T = \mathbf{b}_3}$$

Die somit berechnete neue Basis ist

$$\boxed{\mathbf{b}_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T \qquad \mathbf{b}_2 = (\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3})^T \qquad \mathbf{b}_3 = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})^T}$$

Grafik aus der Vorlesung vom 25.1.2005

Gegebene Basis:

$\mathbf{v}_1 = (2,2,0)^T$
$\mathbf{v}_2 = (1,0,2)^T$
$\mathbf{v}_3 = (0,2,1)^T$

Orthonormale Basis:

$\mathbf{b}_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$
$\mathbf{b}_2 = (\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3})^T$
$\mathbf{b}_3 = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})^T$