



Klausur zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Aufgabe 1: Gegeben seien zwei Vektoren:

$$u = (-2, 2, -1)^T \quad \text{und} \quad v = (-2, -1, 2)^T$$

- a) Normalisiere die beiden und ergänze sie mit Hilfe des Kreuzproduktes zu einer rechtshändigen orthonormalen Basis in \mathbb{R}^3 . **(3 Punkte)**
- b) Betrachte den dritten Vektor
- $$w = (-1, -1, 1)^T$$
- und prüfe, ob u, v, w ein rechtshändiges System bilden. **(2 Punkte)**
- c) Orthonormalisiere u, v, w mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens. Vergleiche das Ergebnis mit a). **(3 Punkte)**

Aufgabe 2: Im islamischen Kalender hat jedes Jahr (fast) genau 354 Tage, und wir gehen davon aus, dass das europäische Jahr genau 365 Tage hat.

- a) Verifiziere, dass 354 und 365 relativ prim sind. **(3 Punkte)**
- b) Angenommen der 1. Januar und der 1. Tag des Ramadan (ein besonderer Fastenmonat für Muslime) fallen heute zusammen. Stelle die Gleichungen für x auf, die die folgende Frage beantworten: **(3 Punkte)**
Nach wievielen Tagen x ab heute (heute wird mitgezählt als Tag 1) fallen der 3. Februar und der 10. Tag des Ramadan zusammen?
- c) Löse das in b) hergeleitete System. **(3 Punkte)**

Aufgabe 3:

- a) Zeige, dass die komplexen Zahlen $z = x + iy$ als Körper isomorph zu den reellen Matrizen der Form

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind. Wie lässt sich der Betrag $|z|$ durch $\phi(z)$ ausdrücken? **(4 Punkte)**

- b) Betrachte die folgenden Urbildmengen

$$Tr^{-1}(\alpha) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Tr(A) = \alpha\}.$$

Überprüfe, ob die Mengen $Tr^{-1}(0)$ und $Tr^{-1}(1)$ als Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^{n \times n}$ affin und/oder linear sind. **(3 Punkte)**

Aufgabe 4: Mit beliebigen nicht verschwindenden Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ und der Identitätsmatrix I betrachte die quadratische Matrix

$$A = I - ba^T$$

Untersuche, unter welchen Bedingungen an a und b es einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass A eine Inverse besitzt und diese die Form

$$A^{-1} = I - \alpha ba^T$$

annimmt.

Hinweis: Keinerlei Determinantenberechnung erforderlich?

(4 Punkte)

Aufgabe 5: Betrachte das folgende System linearer Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Löse dieses durch Anwendung des Gauß-Eliminationsverfahrens. (3 Punkte)
- b) Überprüfe die in a) erhaltene Lösung für x_3 mittels der Cramerschen Regel. (3 Punkte)

Zusatzaufgabe 6: Beim Karatsuba-Algorithmus erfüllt die Gesamtzahl $OPS(p)$ der für die Multiplikation von zwei Polynomen der Ordnung 2^p erforderlichen Multiplikationen und Additionen/Subtraktionen die Rekursion

$$OPS(p) = 3 OPS(p-1) + 2^{p+1}$$

- a) Ausgehend von $OPS(0) = 1$ beweise durch Induktion, dass (4 Bonuspunkte)

$$OPS(p) \leq \frac{4}{3}(1+p)3^p$$

- b) Bestimme die entsprechende Gesamtzahl von Operationen bei der üblichen komponentenweisen Multiplikation von zwei Polynomen der Ordnung 2^p . Entscheide, welches Verfahren im Fall $p = 5$, d.h. bei der Multiplikation zweier Polynome der Ordnung 32, effektiver ist. (4 Bonuspunkte)