HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Prof. PhD. Andreas Griewank
Dr. Andrej Ponomarenko
Dipl.-Ing. Heinz–Jürgen Lange

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 10. (Abgabe: bis 25.01.05)

Aufgabe 1: Betrachte die folgenden vier Vektoren im Raum $\mathbb{R}^3$

$$u = (3,1,2), v = (5,5,4), w = (1,2,8), z = (7,4,5)$$

a) Finde spezielle, nicht alle verschwindende Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so dass

$$\alpha * u + \beta * v + \gamma * w + \delta * z = 0$$

Hinweis: Siehe z.B. die in der Vorlesung vorgeführte auf dem Kreuzprodukt basierende Version der Cramerschen Regel zur Berechnung der Koeffizientendarstellung eines Raumvektors bezüglich dreier vorgegebener linear unabhängiger. (**4 Punkte**)

b) Betrachte die Menge aller Vektoren $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ die diese Gleichung erfüllen. Zeige, dass sie einen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^4$ bilden. Bestimme eine Basis und damit die Dimension dieses Unterraumes. (**4 Punkte**)

c) Berechne das Volumen und die Oberfläche des vom Urspung und den Spitzen der vier Vektoren aufgespannten Simplex. (**4 Punkte**)

d) Überprüfe welche der Punkte a = (4,2,2), b=(2,3/2,13/4) und c = (4/5,3/4,2) im Inneren des Simplex liegen. (**3 Punkte**)

Aufgabe 2: Betrachte zwei Familien linear unabhängiger Vektoren $\{u_i\}_{i=1}^m$ und $\{w_i\}_{i=1}^n$ aus einem Raum V der Dimension d. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

a) Falls $m + n >= d$, können die $\{u_i\}_{i=1}^m$ durch Hinzunahme von Elementen der $\{w_i\}_{i=1}^n$ zu einer Basis von V erweitert werden. (**3 Punkte**)

b) Seien U von $\{u_i\}_{i=1}^m$ und W von $\{w_i\}_{i=1}^n$ aufgespannte Unterräume. Der Schnittraum $W \cap U$ kann irgendeine Dimension zwischen $\max(0, (d - m - n))$ und $\min(m, n)$ haben. (**3 Punkte**)

c) Dann lässt sich eine Basis des Schnittraumes $W \cap U$ durch ausgewählte Element von $\{u_i\}_{i=1}^m$ und $\{w_i\}_{i=1}^n$ bilden. (**3 Punkte**)

d) Der von U und W aufgespannte Raum $U + W$ kann irgendeine Dimension zwischen $\max\{m, n\}$ und $\min\{d, m + n\}$ haben. (**3 Punkte**)

e) Falls jedes Element v von V sich auf höchstens eine Art als Linearkombination der $\{u_i\}_{i=1}^m$ und $\{w_i\}_{i=1}^n$ darstellen lässt so enthält $U \cap W$ nur einen einzigen Vektor. (**3 Punkte**)

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848 e-mail: griewank@math.hu-berlin.de andrej@math.hu-berlin.de
lange@math.hu-berlin.de http://www.mathematik.hu-berlin.de/∼gaggle/MATHINF