



## Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

### Serie 9. (Abgabe: bis 18.01.05)

**Aufgabe 1:** Im Anschauungsraum betrachte die Vektoren  $u = (2, 5, 1)^T$  und  $v = (3, 2, 4)^T$ .

- Berechne die Euklidische Länge von  $u, v, u + v, u - v$  und verifiziere die Dreiecksungleichung und die Parallelogramm-Gleichung. (4 Punkte)
- Berechne das Innere Produkt  $u \cdot v$  und verifiziere die Gültigkeit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. (3 Punkte)
- Berechne den Winkel  $\phi$  zwischen  $u$  und  $v$ . (2 Punkte)
- Berechne die orthogonale Projektion  $\tilde{u}$  von  $u$  auf  $v$ . (2 Punkte)
- Prüfe, dass  $u - \tilde{u}$  orthogonal zu  $v$  ist. (2 Punkte)
- Berechne den Vektor  $\tilde{v}$ , der sich von obigen  $v$  nur in der letzten Komponente unterscheidet und zu  $u$  orthogonal ist. (2 Punkte)
- Berechne den minimalen Abstand zwischen  $u$  und  $v = (3, 2, \nu)^T$  mit  $\nu$  als Variable. (3 Punkte)
- Berechne das Kreuzprodukt  $u \times v$  und zeige, dass es sowohl zu  $u$ , als auch zu  $v$  orthogonal ist. Außerdem prüfe  $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \phi$  mit  $\phi$  wie in **Aufgabe c)**. (3 Punkte)
- Für  $w = (1, 2, 6)^T$  berechne das Spatprodukt  $[u, v, w]$  und entscheide, ob das System  $u, v, w$  links- oder rechts-orientiert ist. (2 Punkte)
- Überprüfe, dass  $[u, v, w] \leq \|u\| \|v\| \|w\|$ . (2 Punkte)

**Aufgabe 2:** Betrachte die  $L_1$  Norm:  $\|v\|_1 = |\nu_1| + |\nu_2| + |\nu_3|$

- Zeige, dass  $\|\cdot\|_1$  für beliebige  $u$  und  $v$  die Dreiecksungleichung  $\|u + v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$  erfüllt. (2 Punkte)
- Zeige, dass  $\|\cdot\|_1$  für die in **Aufgabe 1** angegebenen Vektoren  $(u, v)$  die Parallelogramm-Gleichung nicht erfüllt. (2 Punkte)
- Verifiziere für  $u$  und  $v$  (aus **Aufgabe 1**), dass  $\|\cdot\|_1$  die umgekehrte Dreiecksungleichung erfüllt. (2 Punkte)
- Betrachte die Punkte  $u = (1, 0)$  und  $v = (2, 2)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Zeige geometrisch, dass es mehrere Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  gibt, für die  $\|u - \alpha v\|_1$  minimal wird. (3 Punkte)

**Aufgabe 3:** Die Koordinaten von Berlin sind  $13^\circ 20'$  Länge und  $52^\circ 31'$  Breite. Der Abstand vom Erdmittelpunkt ist  $|r| = 6371$  km. Betrachte ein Koordinatensystem mit diesem Ursprung, der Erdachse als  $z$ -Achse und Greenwich Meridian in der  $z - x$ -Ebene. Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist  $\omega = 7.2921 \cdot 10^{-5}$  rad/s. Berechne den Geschwindigkeitsvektor von Berlin in diesem Koordinatensystem. (4 Punkte)