**Wiederholung**:

Zahlendarstellung:

1.) Primzahldarstellung
2.) Zahldarstellung zu einer festen Basis

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**Kriterien zur Entscheidung**:

1.) Rechenaufgaben sollen schnell zu lösen sein. Multiplikation, Division, Addition, Subtraktion, Runden
2.) Einfachheit der Darstellung

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

zu 1.) Primfaktorzerlegung

$$a = \prod_{j=1}^{a} n_1^{e_1}$$ $a \in \mathbb{N}_+$ , $e_1 \in \mathbb{N}_+$ , $p_1$ : Primzahlen $\Longrightarrow$ Algorithmus zur Darstellung in Primfaktoren ist aufwendig

$\Longrightarrow$ $y = a^x \bmod p_j$ $\Longrightarrow$ schwer lösbar,

zu 2.) Darstellung zu b:

$$a = \sum_{j=0}^{n} a_1 b^1$$ , $a_j \in \{0 , \dots , b - 1\}$ $\Longrightarrow$ Einfachere Darstellung,

Später: $a(x) = \sum_{j=0}^{n} a_1 x^1$ ;

**A-11 Polynomdarstellung**:

$P(x) = c_0 x^0 + c_1 + x^1 + \dots + c_n + x^n$

$c_0 , \dots , c_n \in R$ (Koeffizientenring)
$x \in R$

1.) Koeffizientendarstellung:
Man braucht die Polynomkoeffizienten

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

2.) Stützstellendarstellung (Lagrange Interpolation)

$(x_i , y_i)$ $i = 0 , \dots , n$
$x_i \neq x_j$ ; $i \neq j$

Fragestellung: Aufwand der Auswertung von einer Polynomdarstellung
Ziel: Max. Aufwand soll $0(n^2) \approx c \cdot n^2$ ;

P(x) ist eine Abbildung:

P: $x \xrightarrow{P} P(x)$ ; $R \longrightarrow R$
$x \in R$ $\in R$ $\downarrow$
$R' \longrightarrow R'$

Beweis zu (iii): $P(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \quad x_i^j = y$ ;

Damit können wir nun Gleichungen darstellen.
$(y_0 , s_0) , (y_1 , s_1), \dots , (y_n , s_n)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & y_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & y_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{y}$$

---

$\Rightarrow$ Matrix
A ist regulär

$\Rightarrow$ einfeutige Lösung von C

d.h. hier für $y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ da A regulär ist $\Rightarrow$ $c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $c_i = 0$ , $i = 0 , \ldots , n$ ;

A: Vandermondesche Matrix:

Den Aufwand y zu lösen beträgt $0(n^3)$ (Gauss-Elimination)
Aber da A eine spezielle Struktur hat kann man Aufgrund auf $0(n^2)$ reduzieren.

---

**Kommentar A111**:

Wertepaare $\xrightarrow{\textit{Interpolation}}$ $P(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \quad x^j$

$(x_i , y_i)$
$i = 0 , \ldots , n$ $\xleftarrow[n+1 \ \text{Stützpunkt}]{\text{Auswertung am}}$ (Addition und Multiplikation von

Stützstellen-
darstellung

Koeffizienten-
darstellung

$0(n^2)$ ?

Interpolation $0(n^2)$ $\xleftarrow{\varphi}$ Hornerschema $0(n^2)$

---

**Kostenabschätzung**:

Auswertung an (n + 1) Produkten

1.) Hornerschema: $\left[\begin{array}{l} (n-1) \ \text{Operationen} \\ (n+1) \ \text{Anzahl der Punkte} \end{array}\right.$

$\downarrow$

$(n-1)(n+1) \approx n^2$

$0(n^2) + (n^2) = \tau\, n^2 + \tilde{\tau}\, n^3 = 0(n^2)$

2.) Interpolation (Lagrange-Polynome)

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{i=j}^{n} y_i (x - x_1)}{\prod_{i \neq j}^{n} (x - x_1)} \qquad \prod_{i \neq j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n}$$

a) $n^2$ Multiplikationen und Subtraktionen für das Nennerpolinom
b) $n^3$ Multiplikationen und Subtraktionen für das Zählerpolinom
} Gesamtaufnahme $0(n^3)$

**Trick**: $Q(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_1) \Rightarrow$ Aufwand $0(n^2)$

+ Division (linearer Aufwand)

$P_i(x) = \dfrac{Q(x)}{x - x}$; $\Rightarrow$ x – x , ist Nullstelle von Q(x)

$0(n^2) + 0(n^2) = C_1\, n^2 + C_2\, n^2 = (C_1 + C_2)\, n^2 = 0(n^2)$
$C_1$ , $C_2 << n$

Bemerkung: Heute werden Nullstellen numerisch mit der „Newton"-Methode bestimmt.