HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK, VERTRETUNG: DR. JÜRGEN GEISER
DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH
DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN, LARS SADAU

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Musterlösungen zur Klausur *Mathematik für Informatiker I*

Hinweis:
Der hier aufgeführten Lösungsweg darf nur als Lösungsskizze gesehen werden.

Aufgabe 1:

Erläutern Sie den Begriff „Matrix "und seine Beziehung zu den linearen Abbildungen. $\boxed{2/3\ \textit{Pkt.}}$

Lösung 1:

Eine Matrix ist

- eine rechteckige Anordnung von Einträgen aus $\mathbb{K}$ oder
- eine Anordnung von Zahlen in Zeilen und Spalten oder
- ein Tabellenschema mit Einträgen, die Zahlen oder was anderes sein können oder
- ein Datentyp mit Doppelindex oder
- eine Abbildung
$$a: \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\} \mapsto \mathbb{K},$$
wobei $\mathbb{K}$ eine mathematisch sinnvolle Menge Menge ist. Am besten ein Körper, es würde aber auch mit Ringen funktionieren.

Im Fall, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist, gibt es einen Isomorphismus (eine eineindeutige Abbildung) zwischen den Matrizen aus $\mathbb{K}^{m\times n}$ und den linearen Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ mit den Tupelvektorräumen als Spaltenvektorräumen. Jede Matrix definiert eine lineare Abbildung per Matrix-Vektor-Multiplikation, und einer jeden linearen Abbildung dieses Typs kann eine Koeffizientenmatrix zugeordnet werden.

Im Fall allgemeiner endlichdimensionaler Vektorräume müssen die Vektoren mittels je einer Basis in die Spaltenvektoren ihrer Koeffizienten umgerechnet werden.

Aufgabe 2:

Es seien $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ Matrizen.

(a) Es gebe eine natürliche Zahl $m_A \in \{1,\ldots,n\}$, mit der die Einträge der Matrix $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=1..n}$ die Eigenschaft $\boxed{2\ \textit{Pkt.}}$
$$k \le j + m_A - 1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha_{j,k} = 0$$
haben mögen. Geben Sie eine anschaulich-verbale Beschreibung dieser Eigenschaft an.

(b) Gleichfalls gebe es ein $m_B \in \{1,\ldots,n\}$, mit dem die Einträge der Matrix $B = (\beta_{j,k})_{j,k=1..n}$ ebenfalls $\boxed{4\ \textit{Pkt.}}$
$$k \le j + m_B - 1 \Longrightarrow \beta_{j,k} = 0$$
erfüllen. Zeigen Sie, dass dann die Einträge von $C = (\gamma_{j,k})_{j,k=1..n}$ des Matrixproduktes $C = AB$ die Eigenschaft
$$k \le j + m_A + m_B - 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma_{j,k} = 0$$
erfüllen.

(c) Beweisen Sie, dass im Ring der rechtsoberen Dreiecksmatrizen die Menge der Matrizen mit Nulldiagonale ein Ideal ist. $\boxed{3\ \textit{Pkt.}}$

Lösung 2 (a):

Die Matrix A ist eine Matrix, bei der alle Einträge in und unterhalb der $(m_A - 1)$-ten oberen Nebendiagonale nur 0 enthalten. Die Einträge auf, unter und $M_A - 1$ Positionen rechts neben der Hauptdiagonalen sind 0.

Beispiel für $n = 5$ und $m_A = 3$.

$$\begin{array}{ccccc} 0. & 1. & 2. & 3. & 4. \text{ obere Nebendiagonale} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 2 (b):

Ein Eintrag der Matrix $C = AB$ hat die Form:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i+m_A-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{kj} + \sum_{k=i+m_A}^{i-m_B} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j-m_B+1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0} \end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch die mittlere Teilsumme. Und die ist leer, wenn

$$i + m_A \geq j - m_B + 1 \Leftrightarrow j \leq i + m_A + m_B - 1.$$

Womit die Behauptung bewiesen wäre.

Alternative: indirekter Beweis
Es sei $c_{ij} \neq 0$. Dann muss in der Berechnungsformel für c_{ij} mindestens ein Term von Null verschieden sein. D.h. es gibt ein $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$ mit $a_{ik} b_{kj} \neq 0$. Also müssen beide Faktoren von Null verschieden sein, was nur für

$$\begin{aligned} k \geq i + m_A \quad \& \quad j \geq k + m_B & \\ \Longrightarrow k + j &\geq i + k + m_A + m_B \\ \Longrightarrow j &\geq i + m_A + m_B \end{aligned}$$

möglich ist. Für alle Einträge mit $j < i + m_A + m_B$, d.h. $j \leq i + m_A + m_B - 1$, muss $c_{ij} = 0$ gelten.

Lösung 2 (c):

Die Menge der rechtsoberen Dreiecksmatrizen mit Nulldiagonale ist additiv abgeschlossen.

Für eine rechtsoberen Dreiecksmatrix A mit Nulldiagonale ist $m_A = 1$ und für eine beliebige Matrix B aus dem Ring der rechtsoberen Dreiecksmatrizen ist $m_B \geq 0$. Nach Aufgabenteil (b) (der auch für $m_B = 0$ ohne Änderung gilt) erfüllen die Produkte AB und BA, die Bedingung

$$k \leq j + (m_A + m_B) - 1 \implies (AB)_{jk} = (BA)_{jk} = 0$$

und daraus folgt wegen $1 \leq (m_A + m_B)$

$$k \leq j + 1 \implies (AB)_{jk} = (BA)_{jk} = 0.$$

Das Produkt ist also wieder eine rechtsobere Dreicksmatrix mit Nulldiagonale, daher bilden diese Matrizen ein Ideal im angegebenen Ring.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie, *3 Pkt.*
für welche reellen Zahlen $x \in \mathbf{R}$ die Ungleichung

$$1 + 2x \leq \frac{1 + x}{1 - x}$$

definiert und erfüllt ist.

Lösung 3

Die Ungleichung ist für $x \neq 1$ definiert. Da der Nenner auch negativ sein kann, muss eine Fallunterscheidung gemacht werden.

1.Fall $(x < 1)$**:** Multiplikation mit $(1 - x) > 0$ ändert die Richtung der Ungleichung nicht,

$$\begin{aligned} (1 + 2x)(1 - x) = 1 - x^2 + x - x^2 &\leq 1 + x \\ \iff -2x^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ausage ist für alle $x < 1$ erfüllt.

2.Fall $(x > 1)$**:** Multiplikation mit $(1 - x) < 0$ ändert die Richtung der Ungleichung,

$$\begin{aligned} (1 + 2x)(1 - x) = 1 - x^2 + x - x^2 &\geq 1 + x \\ \iff -2x^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Bedingung für kein x erfüllt.

Die Ungleichung ist nun für die Vereinigung der beiden Lösungsmengen erfüllt, also

$$\{x \in \mathbf{R} | x < 1\} \cap \emptyset = \{x \in \mathbf{R} | x < 1\} = (-\infty, 1).$$

Aufgabe 4:

Beweisen Sie *4 Pkt.*
mittels vollständiger Induktion:

Für alle $n \in \mathbf{N}$ und $x \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) x^k = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{n x^n}{1 - x}.$$

Lösung 4

Induktionsanfang $(n=1)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = (0+1)x^0 = 1$$

$$\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x} = \frac{1-x^1}{(1-x)^2} - \frac{1x^1}{1-x} = 1 \qquad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}\,.$$

Induktionsbehauptung: Zu zeigen ist

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}\,.$$

Induktionsbeweis: Fortlaufende Umformungen

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k \\
&\overset{IV}{=} \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x} + (n+1)x^n \\
&= \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x} + \frac{(n+1)x^n - (n+1)x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x} + \frac{(1-x)x^n}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x} \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Finden und beschreiben Sie die Gestalt der Menge $\boxed{4\ Pkt.}$

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z-1| \geq 2\,|z-i| \right\}$$

Lösung 5:

Sei $z = x + iy$. Die komplexe Norm ergibt den euklidischen Abstand in der Ebene. Es wird also nach allen Punkte gesucht, die von 1 einen mindestens doppelt so großen Abstand wie von i haben. Der Übergang zu den Betragsquadraten liefert

$$\begin{aligned}
& |z-1| \geq 2|z-i| \\
\iff\quad & |x-1+i\,y|^2 \geq 4|x+i\,(y-1)|^2 \\
\iff\quad & (x-1)^2 + y^2 \geq 4(x^2+(y-1)^2 \\
\iff\quad & 0 \geq 4x^2+4y^2-8y+4-(x^2-2x+1+y^2) \\
& = 3x^2+2x+3y^2-8y+3 \\
\iff\quad & 0 \geq x^2+\tfrac{2}{3}x+y^2-\tfrac{8}{3}y+1 \\
& = (x+\tfrac{1}{3})^2+(y-\tfrac{4}{3})^2-\tfrac{1}{9}-\tfrac{16}{9}-1 \\
\iff\quad & \tfrac{8}{9} \geq (x+\tfrac{1}{3})^2+(y-\tfrac{4}{3})^2
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist eine Kreisgleichung in Mittelpunktsform. Die gesuchte Menge ist also eine Kreisscheibe mit Rand in der Gaußschen Zahlenebene mit Mittelpunkt $-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i$ und Radius $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Aufgabe 6:

Geben Sie die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^6 + 1$ an. $\boxed{4\ Pkt.}$

Lösung 6:

Die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^6+1$ sind die 6ten Wurzeln von $-1 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$. Sie sind darstellbar mit Hilfe der Euler-Moivre-Formel als:

$$z_k = e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{6}}, \qquad k = 0,1,\ldots,5$$

Es ergeben sich die Zahlen

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{\frac{\pi}{6}} &&= \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2} \\
z_1 &= e^{\frac{3\pi}{6}} &&= i \\
z_2 &= e^{\frac{5\pi}{6}} &&= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2} \\
z_3 &= e^{\frac{7\pi}{6}} &&= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2} \\
z_4 &= e^{\frac{9\pi}{6}} &&= -i \\
z_5 &= e^{\frac{11\pi}{6}} &&= \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alternative: Man sieht relativ leicht, dass $z = \pm i$ Nullstellen sind. Da es für diese komplexen Nullstellen einen quadratischen reellen Faktor geben muss, kann z^2+1 von z^6+1 abgespalten werden,

$$z^6+1 = (z^2+1)(z^4-z^2+1)\,.$$

Der verbleibende biquadratische Faktor kann in zwei reelle Faktoren der Form $z^2 \pm az + 1$ zerlegt werden, man findet schnell

$$z^4-z^2+1 = (z^2+1)^2-3z^2 = (z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)\,.$$

Die Nullstellen dieser zwei quadratischen Faktoren ergeben die vier fehlenden Nullstellen von z^6+1.

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) das charakteristische Polynom $\boxed{3\ \textit{Pkt.}}$
(Hinweis: zulässige Zeilen- und Spaltenoperationen);

(b) die Eigenwerte $\boxed{2\ \textit{Pkt.}}$
(Hinweis: Erraten ganzzahliger Lösungen);

(c) eine Basis des $\mathbf{R}^4$, $\boxed{6\ \textit{Pkt.}}$
die aus Eigenvektoren von A besteht.

Lösung 7:

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) := \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Durch Entwickeln nach der letzten Zeile, Zeilen- und Spaltenoperationen und abschließend Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) &= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1+\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1+\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)\lambda \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1+\lambda & -1 & 0 \\ -1+\lambda & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)\lambda(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)\,\lambda(1-\lambda) \left(\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= (\lambda-3)\lambda(\lambda-1)(\lambda-1-2) \\
&= (\lambda-3)^2(\lambda-1)\lambda
\end{aligned}$$

(b) Es lassen sich die Eigenwerte $0, 1, 3, 3$ einfach ablesen.

(c) Es müssen die Lösungsräume (entspricht den Eigenräumen) der folgenden drei Gleichungssysteme gefunden werden.

$$\begin{aligned} (A-3I)v &= 0 \\ (A-I)v &= 0 \\ Av &= 0 \end{aligned}$$

Eine Basis kann man dann aus den Basen dieser Eigenräume zusammensetzen. Der Eigenraum bzgl. $\lambda = 3$ wird durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt den Eigenraum bzgl. $\lambda = 0$. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt den Eigenraum bzgl. $\lambda = 1$. Da Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig sind, bildet

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von Eigenwerten.