HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. ANDREAS GRIEWANK, VERTRETUNG: DR. JÜRGEN GEISER
DR. HANS-DIETRICH NIEPAGE, DIPL.-MATH. HOLGER HEITSCH
DIPL.-MATH. LUTZ LEHMANN

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 2. (Abgabe: bis 9.11. nach der Vorlesung bzw. 10.11.06 12:00Uhr in RUD25, 2.42?)

Aufgabe 1:

a) Beweise (s. Lemma A.40), dass eine Untergruppe $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ einer kommutativen Gruppe (mit Verknüpfung "+") eine Äquivalenzrelation **3 Punkte**

$$x \sim y \underset{Df}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathcal{U}$$

in $\mathcal{G}$ definiert.

b) Zeige direkt, dass für ein festes $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ **3 Punkte**

$$x \sim y \Longleftrightarrow m \text{ teilt } x - y$$

eine Äquivalenzrelation in $(\mathbb{Z}, +)$ definiert.

c) Beweise die Aussage, dass jedes Hauptideal $\mathcal{U}$ in einem Körper $\mathcal{M}$ entweder gleich $\{0\}$ oder gleich $\mathcal{M}$ selbst ist. **3 Punkte**

Aufgabe 2:

a) Berechne $(8 * 17 - 5 * 29) * 38 \mod 13$ **2 Punkte**

b) Berechne $\bar{5}/\bar{9} = \bar{5} * \bar{9}^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{17}$. **2 Punkte**

c) Berechne die Inversen aller Elemente $a \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{\bar{0}\}$, d.h. von $a = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, ..., \bar{6}$. **3 Punkte**

Aufgabe 3:

a) Bestimme die von $\bar{8}$ im $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ aufgespannte Untergruppe $\mathcal{U} = \text{span}^{+}_{\mathbb{Z}_{12}}\{\bar{8}\}$. **3 Punkte**

b) Benenne die Äquivalenzklassen von $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ bezüglich $\mathcal{U}$ und wähle geeignete Repräsentanten. **5 Punkte**

c) Zeige, dass $\mathcal{U}$ sogar Ideal von $(\mathbb{Z}_{12}, +, *)$ ist und erstelle eine Additions- und Multiplikationstafel für $\mathbb{Z}_{12}/\mathcal{U}$. **3 Punkte**

Zusatzaufgabe 4: Beweise die folgende Verallgemeinerung von Satz A 54: **4 Bonuspunkte**
Für alle $a, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$, so dass

$$a = q * m + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < |m|$$

gilt. Mit anderen Worten, m darf jetzt ein negatives Vorzeichen haben.

phone: 030/2093-5820 fax: 030/2093-5848
e-mail: griewank@math.hu-berlin.de llehmann@math.hu-berlin.de heitsch@math.hu-berlin.de niepage@math.hu-berlin.de