Skript zur Analysisvorlesung I*

bei Professor A. Griewank

Wintersemester 2008/2009

Matthias A. Bendlin

3. Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

I Grundlegende Begriffe **5**

1 Aussagenlogik 5

1.1 Definition: tertium non datur, Junktoren, Wahrheitstafel und -baum 5

1.2 Satz: logische quivalenzen 6

2 Mathematische Beweisverfahren 8

2.1 Satz: Widerspruchsbeweis 8

2.2 Definition: Wohlordnung 8

2.3 Satz: Induktionsbeweis 8

2.4 Strukturen 9

II Die reellen Zahlen **10**

3 Die Zahlenbereiche 10

4 Die Körperaxiome 11

4.1 Satz: Folgen aus den Körperaxiomen 12

4.2 Satz: Rechenregeln in einem Körper 12

4.3 Definition: Unterstruktur 13

4.4 Definition: Notation für Tupel, Summen, Produkt 13

4.5 Lemma: Verallgemeinerte Distributivität 13

4.6 Definition: Binominalkoeffizient 14

4.7 Lemma: Eigenschaften des Binominalkoeffizienten 15

4.8 Satz: Binominalsatz 15

5 Anordnung, Absolutbetrag, Minimum und Maximum 16

5.1 Lemma: Eigenschaften des Betrages 16

5.2 Definition: max und min 17

6 Vollständigkeit der reellen Zahlen 17

6.1 Definition: Beschränktheit und Schranken 17

6.2 Definition: Supremum und Infimum 17

6.3 Axiom V: Vollständigkeit 18

6.4 Satz: Existenz, Eindeutigkeit und Monotonie der Wurzelfunktion 18

III Folgen und Reihen **20**

7 Folgen und Konvergenz 20

7.1 Definition: Folge 20

7.2 Definition: Konvergenz einer Folge 20

7.3 Lemma: Beschränktheit konvergenter Folgen 21

7.4 Definition: Monotonie 21

7.5 Satz: Konvergenz monotoner, beschränkter Folgen 21

8 Grenzwertsätze 22

8.1 Satz: Grenzwertsätze 22

8.2 Satz: Monotonie des Grenzwertes 23

8.3 Lemma: Folgeneigenschaft vom Supremum/Infimum 23

8.4 Definition: Nullfolgen und uneigentliche Grenzwert 24

8.5 Lemma: Grenzwert des Kehrwertes bestimmt divergenter Folgen 24

9 Teilfolgen, Bolzano-Weierstrass und Cauchy 25

9.1 Lemma: Konvergenz der Teilfolgen einer konvergenten Folge 25
9.2 Satz: Bolzano-Weierstrass 25
9.3 Satz: Direkte Charakterisierung von Häufungspunkten 26
9.4 Satz: Limes superior und Limes inferior 26
9.5 Lemma: Direkte Charakterisierung von Limes superior und Limes inferior . 27
9.6 Satz: Eigenschaften von Limes superior und Limes inferior 27
9.7 Satz: Cauchy-Folge 28
10 Unendliche Zahlenreihen 28
10.1 Definition: Reihe 28
10.2 Satz: Cauchy-Kriterium für Reihen 30
10.3 Satz: allgemeine harmonische Reihe 30
10.4 Definition: alternierende Reihen 31
10.5 Satz: Leibnizkriterium 31
10.6 Definition: absolute Konvergenz 31
10.7 Satz:Verhältnis absoluter und normaler Konvergenz 31
10.8 Korollar: Umsortierung absolut konvergenter Reihen 32
10.9 Satz: Konvergenzkriterien 32
11 b-adische Zahlendarstellung und Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ 33
11.1 Definition: b-adische Zahldarstellung 33
11.2 Lemma: Konvergenz der Darstellung 33
11.3 Satz: Eindeutigkeit der Darstellung 33
11.4 Satz: Periodizität der Darstellung 34
11.5 Lemma: Diagonalargument 35
11.6 Satz: Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ 35
12 Anwendung Wurzelkriterium, Potenzreihen 35
12.1 Lemma: Eigenschaften der Wurzelfunktion 35
12.2 Korollar: Beziehung Reihen und Polynome 36
12.3 Satz: Vergleich von Qoutienten- und Wurzelkriterium 36
12.4 Definition: Potenzreihe 37
12.5 Satz: Konvergenzradius von reellen Potenzreihen 37
12.6 Lemma: Verknüpfung (+) von Potenzreihen 38
12.7 Satz: Restgliedabschätzung 39
12.8 Korollar: Potenzreihen am Ursprung 39
12.9 Satz: Identitätssatz von Potenzreihen 39
12.10 Definition: Cauchy-Produkt 40
12.11 Satz: Konvergenz des Cauchy-Produktes 40

IV Stetigkeit und Konvergenz **41**
13 Stetigkeit reeller Funktionen 41
13.1 Definition: Stetigkeit 41
13.2 Definition: Lipschitz-Stetigkeit 42
13.3 Lemma: Zusammenhang Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit 42
13.4 Lemma: Lipschitz-Stetigkeit der Potenzfunktion 42
13.5 Folgerung: Lipschitz-Stetigkeit der Potenzfunktionen 42
13.6 Satz: Nullstellensatz 42
13.7 Folgerung: Nullstelle eines Polynoms ungeraden Grades 43
13.8 Folgerung: Wurzelfunktionen 43
13.9 Definition: Schreibweise der Wurzelfunktion 43
13.10 Lemma: Stetigkeit der Wurzelfunktionen 43
13.11 Satz: äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit 44
13.12 Satz: Verknüpfung stetiger Funktionen 44
13.13 Satz: Komposition von stetigen Funktionen 45
13.14 Satz: Bolzano-Weierstrass 45
13.15 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit 46
13.16 Satz: von Heine-Borel 46
14 Verallgemeinerung von Stetigkeitsresultaten auf $\mathbb{R}^n$ 46

14.1 Definition: euklidische Norm . . . 47
14.2 Lemma: Eigenschaften der euklidischen Norm, Cauchy-Schwarz-Ungleichung 47
14.3 Definition: Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ . . . 48
14.4 Definition: Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . 48
14.5 Satz: Rechenregeln, Verallgemeinerung von 13.12 . . . 49
14.6 Satz: Verallgemeinerung von Bolzano-Weierstrass/Heine-Borel, 13.14, 13.16 49
14.7 Definition: Zusammenhngende Menge . . . 50
14.8 Satz: Mittelwertsatz, Verallgemeinerung von 13.6 . . . 50
15 Gleichmäßige Konvergenz . . . 51
15.1 Definition: punktweise Konvergenz . . . 51
15.2 Definition: gleichmäßige Konvergenz . . . 51
15.3 Satz: Vererbung von Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz . . . 51
15.4 Satz: gleichmäßige Konvergenz von Cauchy-Folgen . . . 52
15.5 Definition: Konvergenz von Reihen . . . 52
15.6 Satz: Majorantenkriterium von Weierstrass(glm. Kvg. von Fkt-folgen) . . . 52
15.7 Satz: Stetigkeit und glm. Konvergenz innerhalb des Kvg-Radius . . . 53
16 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion . . . 53
16.1 Lemma: elementare Eigenschaften des Exponentials . . . 53
16.2 Definition: Eulerische Zahl . . . 54
16.3 Satz: Interessante Eigenschaften von $exp(x)$ . . . 54
16.4 Satz: Umkehrfunktion f^{-1} für monotones, stetiges und abgeschlossenes f . 55
16.5 Definition: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion . . . 56
16.6 Lemma: Eigenschaften des Logarithmus . . . 56
16.7 Definition: Allgemeine Potenz- und Logarithmusfunktion . . . 56
16.8 Lemma: Eigenschaften des allgemeinen Logarithmus . . . 56
16.9 Lemma: Eigenschaften von Sinus und Kosinus . . . 57
16.10 Satz: Weitere Eigenschaften von Kosinus und Sinus . . . 58

V Differentation 59
17 Definition und Grundeigenschaften . . . 59
17.1 Definition: Differenzierbarkeit . . . 59
17.2 Definition: Links- und Rechtsdifferenzierbarkeit . . . 60
17.3 Lemma: Zusammenhang von Richtungsdifferenzierbarkeit und Differenzierbarkeit . . . 61
17.4 Satz: Ableitungen von Summen, Produkten, Qoutienten . . . 61
17.5 Satz: Kettenregel . . . 62
17.6 Definition: Minima und Maxima . . . 62
17.7 Satz: Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung (1. Ableitung) . . . 63
17.8 Satz: Zwischenwertsatz der Differentation . . . 63
17.9 Korollar: monotone und streng monotone Steigung . . . 63
17.10 Satz: Existenz und Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen . . . 64
17.11 Korollar: besondere Ableitungen . . . 64
17.12 Satz: Lipschitzstetigekeit stetiger, differenzierbarer Funktionen . . . 64
18 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz . . . 65
18.1 Satz: Satz von Rolle . . . 65
18.2 Satz: verallgemeinerte Mittelwertsatz . . . 65
18.3 Satz: Zwischenwertsatz für Ableitungen . . . 65
18.4 Satz: Regel von l'Hospital . . . 65
19 Ableitungen höherer Ordnung . . . 67
19.1 Definition: k-fache Differenzierbarkeit . . . 67
19.2 Satz: Leibniz-Regel, Produktregel für höhere Ableitungen . . . 67
19.3 Satz Taylorformel . . . 67
19.4 Korollar: Schlämilch-Restglied . . . 68
19.5 Beweis . . . 69
19.6 Definition: Entwickelbarkeit von Funktionen . . . 69
19.7 Satz: hinrechende Bedingung für Maxima . . . 69

VI Integration **70**
20 Das bestimmte Integral nach Riemann . . . 70
20.1 Eigenschaften des Integrals . . . 70
20.2 Definition: Treppenfunktion . . . 70
20.3 Lemma: Verknpfung von Treppenfunktionen . . . 70
20.4 Definition und Lemma: Integral und Summe . . . 71
20.5 Definition und Lemma: Konvergenz einer Folge von Treppenfunktionen . . 71
20.6 Satz: Existenz einer passenden Treppenfunktion (Teil 1) . . . 72
20.7 Satz: Abschluss der Treppenfunktionen in Raum der richtungsstetigen Funktionen (Teil 2) . . . 73
20.8 Satz: Integral im Raum der richtungsstetigen Funktionen . . . 73
20.9 Definition: Riemannsche Summe . . . 74
20.10 Satz: Konvergenz der riemannschen Summe . . . 74
20.11 Satz: Konvergenz der Riemannsummen bei Unstetigkeiten . . . 75
20.12 Beweis . . . 75
20.13 Definition: Riemannintegriebarkeit . . . 76
20.14 Satz: Integraleigenschaften der Riemannintegrierbarkeit . . . 76
20.15 Lemma: Riemannintegriebarkeit aufgesplitteter Intervalle . . . 76

Kapitel I

Grundlegende Begriffe

1 Aussagenlogik

Das Ziel der Aussagenlogik ist der verbale Ausdruck von logischen Zusammenhängen. Dazu werden gewisse a priori wahre Voraussetzungen (Axiome) und Formelsymbole mit definierten Eigenschaften verwendet.

1.1 Definition: tertium non datur, Junktoren, Wahrheitstafel und -baum

- Aussagen sind sprachliche Gebilde, die entweder wahr oder falsch sein können, aber nicht beides (tertium non datur).
- Aussagen können durch Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ zu komplexeren Aussagen verknüpft werden.
- Die Aussagenlogik selbst beschäftigt sich mich allgemeinen Prinzipien des Argumentieren und Schlussfolgern durch Aussagen und deren Kombination.

Algebraische Interpretation: Die Aussagenlogik kann als das Auswerten und Manipulieren von Formeln mit booleschen Variablen A,B,C..., welche nur die Werte 1 für wahr und 0 für falsch annehmen können, betrachtet werden. Zulässige Junktoren sind:

$Junktor$	$Bezeichnung$	$verbaler Ausdruck$
$\neq$	$Negation$	$nicht$
$\wedge$	$Konjugation$	und
$\vee$	$Disjunktion$	$oder$
$\Leftarrow \setminus \Rightarrow$	$Implikation$	$falls \setminus wenn, dann$
$\Leftrightarrow$	$Biimplikation$	$genau dann, wenn$

Ein weiterer, zusammengesetzter Junktor, ist der der Kontravalenz:

$$X \oplus Y \Leftrightarrow X \dot{\vee} Y \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (\neg(X \wedge Y))$$

Beispiel

$A \Leftrightarrow [((X \wedge Y) \vee Y) \Leftrightarrow (X \wedge (\neg(Z))] \equiv A(X, Y, Z)$ Die Aussage A trifft genau dann zu, wenn die Auswertung der rechten Seite für eine gewählte Wahrheitsbelegung von X,Y und Z eine 1 ergibt.

Wahrheitstafeln

Für unsere vorhin genannten binären Junktoren lauten die Wahrheitstafeln, das heißt die Wahrheit einer Aussage bei gegebener Wahrheitsbelegung von den Variablen, folgendermassen:

x	$\neg x$
0	1
1	0

Negation

$x\backslash y$	1	0
1	1	0
0	0	0

Konjukation

$x\backslash y$	1	0
1	1	1
0	1	0

Disjugation

$x\backslash y$	1	0
1	1	0
0	1	1

Implikation $\Rightarrow$

$x\backslash y$	1	0
1	1	1
0	0	1

Implikation $\Leftarrow$

$x\backslash y$	1	0
1	1	0
0	0	1

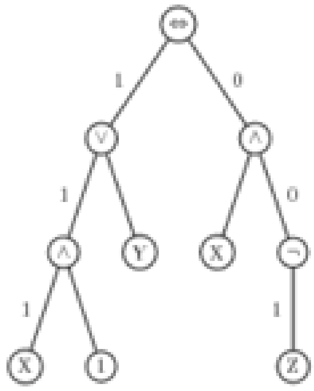
Biimplikation

Somit ergibt sich für unsere Aussage aus dem Beispiel die folgende Wahrheitstafel:

X:	1	1	1	1	0	0	0	0
Y:	1	1	0	0	1	1	0	0
Z:	1	0	1	0	1	0	1	0
A:	0	1	0	1	0	0	1	1

Wahrheitsbaum

Für eine gewählte Wahrheitsbelegung A(X,Y,Z) kann man auch einen Wahrheitsbaum anlegen, der für die Belegung A(1,1,1) folgendermaßen aussieht:



1.2 Satz: logische quivalenzen

- $X \wedge 1 \Leftrightarrow X \Leftrightarrow X \vee 0, X \wedge 0 \Leftrightarrow 0, X \wedge 1 \Leftrightarrow 1$ (Tautologie, Widerspruch)
- $X \wedge X \Leftrightarrow X \Leftrightarrow X \vee X$(Idempotenz)
- $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X, X \vee Y \Leftrightarrow Y \vee X$ (Kommutativität)
- $(X \wedge Y) \wedge Z \Leftrightarrow X \wedge (Y \wedge Z), (X \vee Y) \vee Z \Leftrightarrow X \vee (Y \vee Z)$ (Assoziativität)
- $(X \wedge Y) \vee Z \Leftrightarrow (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z), (X \vee Y) \wedge Z \Leftrightarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$ (Distributivität)
- $\neg(\neg X) \Leftrightarrow X, X \vee (\neg X) \Leftrightarrow 1$ (doppelte Verneinung, Tautologie)
- $\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \wedge \neg Y, \neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$ (DeMorganschen Regeln)
- $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((\neg X) \vee Y)$
- $(X \Leftarrow Y) \Leftrightarrow ((\neg Y) \vee X)$
- $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

Beweis

Alle Beweise können ganz einfach durch Wahrheitstafeln gezeigt werden.

Ausführliches Beispiel eines logischen Problemes

Wir befinden uns auf der Insel WaFa. Die Einwohner dieser Insel, die Wa's und die Fa's, haben die Eigenschaft, immer die Wahrheit zu sagen oder zu lügen. Nun verirrt sich ein Besucher auf die Insel und trifft die Inselbewohner A,B und C, welche folgende Aussagen verlauten:

- A sagt: B und C sagen genau dann die Wahrheit, wenn C die Wahrheit sagt.
- B sagt: Wenn A und C die Wahrheit sagen, dann ist es nicht der Fall, dass A die Wahrheit sagt, wenn auch B die Wahrheit sagt.
- C sagt: B lügt genau dann, wenn A oder B die Wahrheit sagen.

Der Besucher versucht nun den Wahrheitsgehalt der Aussagen durch den Ausdruck der Behauptungen in booleschen Variablen zu verifizieren. Er weiß, daß Wahrheit gilt, genau dann, wenn:

$$\begin{aligned} 1 \Leftrightarrow \phi(X,Y,Z) \Leftrightarrow (X \Leftrightarrow ((Y \wedge Z) \Leftrightarrow Z)) \\ \wedge (Y \Leftrightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow \neg (X \Leftarrow (X \vee Y)))) \\ \wedge (Z \Leftrightarrow (\neg Y \Leftrightarrow (X \vee Y))) \end{aligned} \tag{I.1}$$

Aus der letzten Aussage, die alle wahr sein müssen (Konjukation), folgt:

$$\begin{aligned} Z &\Leftrightarrow [(\neg Y) \wedge (X \vee Y)] \vee (Y \wedge \neg(X \vee Y)) \\ &\Leftrightarrow [\underbrace{((\neg Y) \wedge Y)}_{\Leftrightarrow 0} \vee(\neg Y \wedge X)) \vee \underbrace{(Y \wedge (\neg X) \wedge \neg Y)}_{\Leftrightarrow 0}] \\ &\Leftrightarrow (\neg Y \wedge X) \end{aligned} \tag{I.2}$$

Somit kann der Besucher aus der ersten Aussage durch Einsetzten von Z schließen:

$$\begin{aligned} X \Leftrightarrow \underbrace{(Y \wedge ((\neg Y) \wedge X))}_{\Leftrightarrow 0} \Leftrightarrow ((\neg Y) \wedge Z) \Leftrightarrow (0 \Leftrightarrow (\neg Y \wedge X) \Leftrightarrow \neg(\neg Y \wedge X) \Leftrightarrow Y \vee (\neg X) \\ \Rightarrow X \wedge (Y \vee (\neg X)) \vee \neg X \wedge (\neg(Y \vee \neg X)) \\ \Rightarrow X \wedge Y \vee \underbrace{(X \wedge \neg X)}_{\Leftrightarrow 0} \vee \underbrace{(\neg X) \wedge (\neg Y) \wedge X)}_{\Leftrightarrow 0} \end{aligned} \tag{I.3}$$

Somit müssen sowohl X, als auch Y wahr sein; A und B sagen die Wahrheit. Daraus schließt sich:

$$Z \Leftrightarrow X \wedge \neg Y \Leftrightarrow 1 \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \tag{I.4}$$

Frage: Wird die mittlere Aussage von dieser Wahrheitsbelegung erfüllt? Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 1 \Leftrightarrow (1 \wedge 0) \Rightarrow \neg (1 \Leftarrow (1 \vee 1)) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow (0 \Rightarrow \neg (1 \Leftarrow 1)) \\ \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow (0 \Rightarrow \neg (1)) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow (0 \Rightarrow 0) \Leftrightarrow 1 \surd \end{aligned} \tag{I.5}$$

Also werden alle drei Aussagen genau durch eine Wahrheitsbelegung erfüllt.

Bemerkung zur Aussagenlogik

Im Beispiel der Insel WaFa konnten wir durch geschickte Umformungen relativ schnell zum Ziel kommen, das heißt eine geeignete und zudem noch eindeutige Belegung von X,Y und Z finden. Alternativ hätten wir alle acht möglichen Belegungen (1,1,1),(1,1,0),...,(0,0,0) durchprobieren können. Für einen allgemeinen Ausdruck der Form: $\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \Leftrightarrow \ldots$ würde das Durchprobieren („Exhaustive Search“) genau 2^n Auswertungen von ϕ verlangen. Das Auffinden einer Lösung eines solchen aus $\wedge, \vee \neg$ zusammengesetzten Ausdruckes heißt das „Satisfiability Problem“(SAT). Dieses Problem ist „NP-Vollständig“, dass heißt, wenn es mit polynomialen Aufwand lösbar wäre, dann gelte dies auch für viele andere kombinatorische Probleme, wie zum Beispiel der Primfaktorzerlegung und die gebräuchlichen Kryptographiesysteme wären nicht mehr sicher.

2 Mathematische Beweisverfahren

2.1 Satz: Widerspruchsbeweis

Oben haben wir folgenden Satz bewiesen:

$$\underbrace{\phi(X,Y,Z) \Leftrightarrow 1}_{Vorraussetzung\ V} \Rightarrow \underbrace{(X \Leftrightarrow 1) \wedge (Y \Leftrightarrow 1) \wedge (Z \Leftrightarrow 0)}_{Behauptung\ B} \tag{I.6}$$

Diese Implikation wurde direkt bewiesen, indem ausgehend von V durch logische Umformungen B hergeleitet wurde. Wegen $(V \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg V)$, benutzt man oft auch eine indirekte Beweisführung, das heißt, man leitet aus der Negation der Behauptung die Negation der Voraussetzung her. Wenn V trivial ist, das heißt immer erfüllt ist, spricht man auch von einem **Widerspruchsbeweis**. Ein klassisches Beispiel für dieses Beweisverfahren lautet:

$$\begin{aligned} V &\Leftrightarrow \{\text{Axiome der natürl. Zahlen nach Peano}\} \\ B &\Leftrightarrow \{\text{ Es gibt unendl. viele Primzahlen}\} \\ \neg B &\Leftrightarrow \{\text{ es existieren nur endl. viele Primzahlen } p_1, p_2, \ldots p_n\} \\ &\Rightarrow (p_1 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1 \text{ ist prim} \Rightarrow \text{ Widerspruch} \end{aligned}$$

Ein weiteres Beweisverfahren ist jenes der **(vollständigen) Induktion**.

2.2 Definition: Wohlordnung

Eine Menge M heißt wohlgeordnet durch eine strenge Ordnungsrelation

$$x \ < \ y \quad ((x,y) \in R \subset M \times Y, R \,\text{Relation})$$

wenn für alle $\{x,y,z\} \subset M$ gilt:

1. $x \not< x$ (Irreflexivität)
2. $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$ (Transitivität)
3. Entweder $(x < y)$ oder $(x = y)$ oder $(x > y)$ (Trichotomie)
4. Für jede nichtleere Teilmenge $N \subset M$ existiert ein kleinstes minimales Element $n \in N$, so daß: $m \in N \Rightarrow (m > n) \vee (m = n)$

Bemerkung: Die natürlichen Zahlen und alle endlichen Teilmengen haben diese Eigenschaften. Sie lässt sich erweitern auf überabzählbare Ordnungszahlen.

2.3 Satz: Induktionsbeweis

Für M wohlgeordnet und $A : M \to \{0,1\}$ gilt:

$$((\forall n \in M, \forall m \in M : m < n \to A(m) = 1) \Rightarrow A(n) = 1) \Rightarrow A(n) = 1$$

In Worten: Falls für beliebiges $n \in M$ aus $A(m) = 1$ für alle $m < n$ folgt, daß auch $A(n) = 1$ ist, dann gilt $A(n) = 1$ für alle $n \in M$.

Beweis

Falls die Menge $N = A^{-1}(0)$ im Widerspruch zur Behauptung nicht leer ist, dann hat sie ein kleinstes Element $n \in N$, wegen vorausgesetzter Wohlordnung. Dann gehören aber alle $m \in M$ zu $A^{-1}(1) = C_N \equiv M \backslash N$, so daß nach Voraussetzung auch gelten muss: $A(n) = 1 \Rightarrow N \cap C_N = \emptyset$, dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung $\Box$

Bemerkung: Der übliche Induktionsanfang wurde in den Induktionsschluss integriert, da für $n = 1 = \min\{n \in N = M\}$ die Bedingung $[(m < 1) \wedge (m \in \mathbb{N})]$ nicht erfüllbar ist und daher die Implikation $A(1) = 1$ also trivialerweise gelten muss.

Beispiel: Die Bernoulli-Ungleichung.
Behauptung: $(1+h)^n \geq 1 + hn$ für $n \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathbb{R}, h \geq -1$

Beweis:

1. Induktionsvoraussetzung: $(1+h)^n \geq 1 + hn$
2. Induktionsbehauptung: $(1+h)^{n+1} \geq 1 + h(n+1)$
3. Induktionsanfang: $n = 1 : 1 + h = 1 + h \,\forall\, h \in \mathbb{R}$
4. Induktionsschritt: Die Aussage sei für $1 \leq m \leq n+1$ richtig.

$$\begin{aligned} n \to n+1 : (1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h) \\ &\overset{I}{\geq} (1+nh)(1+h) \\ &= 1 + h + nh + nh^2 \\ &\geq 1 + (n+1)h \quad \square \end{aligned}$$

2.4 Strukturen

Von Mengen zu Funktionen: Mengen $\to$ geordnete Paare, kartesisches Produkt $\to$ Relationen ($\to$ quivalenzrelationen, Ordnungsrelationen) $\to$ Funktionen
Strukturen in der Mathematik bestehen aus Mengen, ausgezeichneten Elementen und Funktionen.
Beispiele: $(\mathbb{N}, 1, n), 1 \in \mathbb{N}, n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und n die Nachfolgefunktion oder allgemeiner $(M, e, S), e \in M, S : M \to M$.
Die Struktur der Nachfolgefunktion $(\mathbb{N}, 1, n)$ ist frei und minimal, das heißt, es gibt ein erzeugendes Element und es ist die kleinste Struktur, die die Eigenschaften der Nachfolgefunktion erfüllt. Es gilt:

- 1 hat keinen Vorgänger, das heißt ist nicht im Bild von n enthalten.
- n ist injektiv, das heißt es gibt immmer maximal einen Vorgänger.
- $X \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in X$ und $\forall y \in X : n(y) \in X \Rightarrow X = \mathbb{N}$(Induktionsargument).

Mengentheoretische Betrachtung der natürlichen Zahlen: $1 := \{\emptyset\}, n(A) = A \cup \{A\}$, also $2 = n(1) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$

Addition: $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wird rekursiv definiert durch: $\alpha(x, 1) := n(x), \alpha(x, n(y)) := n(\alpha(x, y))$

Kapitel II

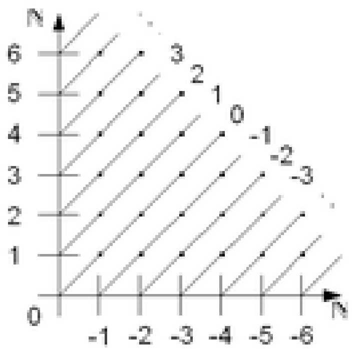
Die reellen Zahlen

3 Die Zahlenbereiche

Die Grundlegende Zahlenbereichshierachie lautet $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}(\subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O})$, wobei $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots\}$

Motivation für $\mathbb{Z}$: Die Gleichung $a + x = b$ mit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ist nicht immer nach $x \in \mathbb{N}$ auflösbar. Wenn $c + x = d, (c, d) \in \mathbb{N}^2$ eine zweite Gleichung ist, dann ist diese mit der ersten konsistent, wenn $a + d = b + c \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d)$.

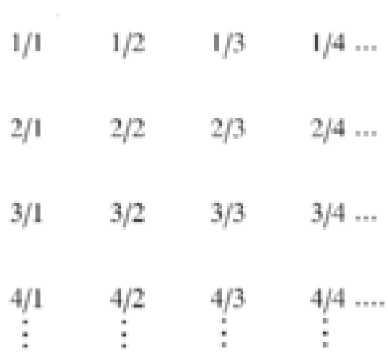
Skizze:



Somit ergibt sich die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, k, -k, \ldots\}$

Motivation für $\mathbb{Q}$: Nun ist allerdings wiederum die Gleichung $ax = b$ mit $(a, b) \in \mathbb{Z}$ nicht immer in $x \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Skizze:

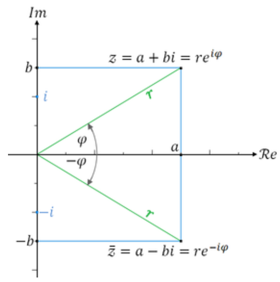


Somit erhalten wir die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q$ teilerfremd$\}$

Nun kann man weiter die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ konstruieren.

Motivation für $\mathbb{C}$: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Wir konstruieren dazu die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + \sqrt{-1}y : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ mit $\sqrt{-1} =: i$.

Skizze:



Bemerkung: Das Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt Menge der irrationalen Zahlen, die sich weiter aufteilen in die Menge der irrationalen algebraischen und die Menge der tranzendenten Zahlen.

Algebraische Zahlen sind Nullstellen von Polynomen mit rationalen beziehunsweise ganzen Koeffizienten. Rechenoperationen mit ihnen sind rein algebraisch ausführbar. Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mit tranzendenten Zahlen ist das ureigene Anliegen der Analysis. Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist wieder rein algebraisch.

4 Die Körperaxiome

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bilden jeweils einen Körper im folgenden Sinne: Es gelten die nachstehenden Axiome für die additive Verknüpfung $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $+(x, y) =: x + y$, so daß gilt:

I.1. $\forall\ x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$ beziehungsweise $+(+(x, y), z) = +(x, +(y, z))$ (Assoziativität)

I.2. $\forall\ x, y\ \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y = y + x$ beziehungsweise $+(x, y) = +(y, x)$ (Kommutativität)

I.3. $\exists 0 \in \mathbb{K}$ so daß: $\forall x \in \mathbb{K} : x + 0 = x$ beziehungsweise $+(x, 0) = x$ (Existenz des Nullelementes, des neutralen Elementes der Addition)

I.4. $\forall x \in \mathbb{K} \exists y \in \mathbb{K}$ so daß: $x + y = 0, y := -x$ (negatives Element, inverses Element der Addition)

Für die multiplikative Verknüpfung $: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ \ \cdot(x, y) =: xy$ des Körpers gelten außerdem folgende Axiome:

II.1. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt: $x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ beziehungsweise $\cdot(\cdot(x, y), z) = \cdot(x, \cdot(y, z))$ (Assoziativität)

II.2. $\forall\ x, y \in \mathbb{K}$ gilt: $x \cdot y = y \cdot x$ beziehungsweise $\cdot(x, y) = \cdot(y, x)$ (Kommutativität)

II.3. $\exists\, 1 \in \mathbb{K}$ so daß $\forall\ x \in \mathbb{K}$ gilt: $x \cdot 1 = x$ beziehungsweise $\cdot(x, 1) = x$ (Einselement, neutrales Element der Multiplikation)

II.4. $\forall\ 0 \neq x \in \mathbb{K} \exists\, y \in \mathbb{K} : xy = 1,\ \ y := x^{-1} = \frac{1}{x}$ (inverses Element der Multiplikation)

Außerdem gilt für die Verknüpfung beider Abbildung folgendes Axiom:

III.1. $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x + y) \cdot z = xz + yz$ beziehungsweise $\cdot(z, +(x, y)) = +(\cdot(xz), \cdot(yz))$ (Distributivgesetz)

Bemerkung: In $\mathbb{Z}$ gelten all diese Axiome mit Ausnahme von II4. Eine solche Struktur heißt auch kommutativer Ring mit 1. $\mathbb{N}$ verletzt außerdem noch II3 und I4, eine solche Struktur nennt man Halbring oder Semi-Ring.

4.1 Satz: Folgen aus den Körperaxiomen

Aus den Körperaxiomen folgt:

i). Die Eindeutigkeit der 0, des neutralen Elementes der Addition, die Eindeutigkeit der 1, dem neutralen Element der Multiplikation.

ii). Daraus folgt wiederum die Eindeutigkeit des Negativen und der Differenz $y - x := y + (-x), (x, y) \in \mathbb{K}^2$, sowie des Kehrwertes und des Qoutienten $\frac{y}{x} := yx^{-1}, (x, y) \in \mathbb{K}^2, x \neq 0$.

iii). Somit wiederum ergibt sich die eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungen $a + bx = c$.

Beweis

i). Angenommen 0 und $0'$ sind neutrale Elemente bezüglich der Addition, dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}$ sowohl $0 + x = x$, als auch $0' + x = x$. Setzt man $x = o'$ in die erste und $x = 0$ in die zweite Gleichung ein, erhält man $0 + 0' = 0' \wedge 0' + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0' = 0'$.
Der Beweis für die Eindeutigkeit des neutralen Elementes der Multiplikation verläuft analog.

iii). Wegen $b \neq 0$ ist $x = \frac{(c \cdot a)}{b}$ wohldefiniert. Einsetzen von x in die Gleichung ergibt:

$$a+b[(c-a)b^{-1}] = a+[(c-a)b]b^{-1} = a+(c-a)(b\cdot b^{-1}) = a+(c-a) = a+c-a = a-a+c = c$$

$\Rightarrow x$ ist tatsächlich Lösung.
Beweis der Eindeutigkeit: Sei $a+b\tilde{x} = c$ für $\tilde{x} \in \mathbb{K}$: $\Rightarrow (a+b\tilde{x}) = (a+bx) \Leftrightarrow b\tilde{x} = bx \Leftrightarrow \tilde{x} = x$

4.2 Satz: Rechenregeln in einem Körper

Rechenregeln für beliebige $x, y \in \mathbb{K}$:

i). $(-(-x)) = x \ \forall \ x \in \mathbb{K}$ und $((x^{-1})^{-1}) = x$ wenn $x \neq 0$

ii). $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

iii). $(-x)y = -(xy)$

iv). $-(x + y) = -x - y \ \forall \ x, y \in \mathbb{K}$ und $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ für $x \neq 0 \neq y$

Beweis

ii). "$\Leftarrow$": Daß heißt wir beweisen die Implikation von rechts nach links. O.B.d.A. :

$$\text{Sei} x = 0 \Rightarrow xy = 0y = (0 + 0)y = 0y + 0y \Rightarrow 0y = 0y + 0y \Rightarrow 0 = 0y$$

"$\Rightarrow$": Falls x=0 ist nichts zu beweisen. Sonst existiert x^{-1}, so daß $0 = xy \Rightarrow x^{-1}0 = 0 = x^{-1}xy = y \Rightarrow y = 0$ wie behauptet.

Zusammenfassung: Alle aus der Schule bekannten Rechenregeln lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten und gelten insbesondere in $\mathbb{R}$ und allen Teilkörpern $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Bemerkung: Die Grundrechenarten sind alle jeweils binäre Operationen, daß heißt, daß sie jeweils zwei Argumente zu einem Körperelement verknüpfen. Demgegenüber sind $-x$ und x^{-1} unäre Operationen, daß heißt, sie werden jeweils auf ein Element angewendet. Das Minuszeichen kann somit sowohl eine unäre, wie auch binäre Operation darstellen. Das unäre Pluszeichen ist trivial und wird meist weggelassen.

4.3 Definition: Unterstruktur

Eine Teilmenge $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ eines Ringes ist genau dann selbst ein Ring bezüglich der in $\mathbb{K}$ definierten binären und unären Operationen, falls $\mathbb{K}'$ algebraisch abgeschlossen ist, daß heißt $\forall\, x, y \in \mathbb{K}'$: $x + y, x \cdot y \in \mathbb{K}'$.
Mit anderen Worten: Die Operationen dürfen nicht aus der Teilmenge hinausführen. Ist $\mathbb{K}$ sogar ein Körper und die Teilmenge auch über die Kehrwertbildung abgeschlossen, dann ist die Teilmenge auch ein Teilkörper.

Beispiel: $\mathbb{K}' = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ und ein Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$, daß heißt $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{K}' \subsetneq \mathbb{R}$.

Frage: Warum ist $\mathbb{K}' \neq \mathbb{Q}$.

Antwort: Weil $\sqrt{2}$ irrational ist, daß heißt die äquivalenten Bedingungen $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow$ $m^2 = 2n^2$ für $m, n \in \mathbb{N}$ nicht erfüllbar.

Beweis: Annahme, es gibt ein geeignetes Paar $m, n \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. gilt dann: m, n sind nicht beide gerade, sonst wird gekürzt. Da wiederum $m^2 = 2n^2$ gerade ist, kann m nicht ungerade sein. Somit folgt, daß n ungerade sein muss. Da aber gilt, daß $n^2 = \frac{m^2}{2} = m\frac{m}{2}$, folgt, daß n gerade ist. Somit haben wir einen Widerspruch und es kann kein geeignetes Paar m, n aus $\mathbb{N}$ geben, welches $\sqrt{2}$ ergibt $\square$

4.4 Definition: Notation für Tupel, Summen, Produkt

Schlußfolgerung aus den Körperaxiomen: Verallgemeinerung von Assoziativität, Kommutativität, Distributivität auf endliche Summen und Produkte, sowie deren Verknüpfungen. Für ein Tupel von n Zahlen schreibt man $(a_j)_{j=1}^n = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Für Addition und Multiplikation gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j := (\ldots((a_1 + a_2) + a_3) + \ldots) + a_n = (\sum_{j=1}^{n-1} a_j) + a_n$$

$$\prod_{j=1}^{n} a_j := (\ldots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \ldots) \cdot a_n = (\prod_{j=1}^{n-1} a_j) \cdot a_n$$

Beispiel: Die Fakultät: $n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = (n-1)! \cdot n$

Bemerkung: Hier wird induktiv „bewiesen“beziehungsweise sichergestellt, daß die Aussage $A(n)$ =Das Produkt bzw. die Summe der Zahlen $(a_j)_{j=1}^n$ ist wohldefiniert.

Behauptung: Der Wert einer Summe oder eines Produktes in einem Körper ist unabhängig von der Reihenfolge der Elemente.
Beweis: Wurde in der Übung erbracht.

4.5 Lemma: Verallgemeinerte Distributivität

$\forall\, b \in \mathbb{K}$ und $(a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$b(\sum_{j=1}^{n} a_j) = \sum_{j=1}^{n}(ba_j)$$

Dabei kann das Argument der Summe ein beliebiger Ausdruck sein, der nicht unbedingt vom Laufindex abhängen muss, wie zum Beispiel:

$$\sum_{j=1}^{n} b = nb$$

Beweis

Beweis durch Induktion über den Laufindex n. Zu zeigen ist: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Gültigkeit der Beahauptung für alle $m < n$, daß die Aussage auch für n selbst gilt. Fallunterscheidung:

1). Wenn $n = 1$ ist, ist die Menge der m, die kleiner als n sind, leer, und somit muss die Aussage für $n = 1$ direkt bewiesen werden, da jede beliebige Aussage für die leere Menge gilt.
Induktionsanfang: $n = 1$:

$$b \cdot \sum_{j=1}^{1} a_j = b \cdot a_1 = \sum_{j=1}^{1} (b \cdot a_j) \tag{II.1}$$

2). Wenn $n > 1$, können wir das Wissen verwenden, daß die Aussage bereits für alle $m < n$ gilt.
Induktionsschritt: $m = n - 1 \rightarrow n$:

$$\begin{aligned} b \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_j) &= b \cdot ((\sum_{j=1}^{n-1} a_j) + a_n) = b \cdot (\sum_{j=1}^{n-1} a_j) + b \cdot a_n \\ &\overset{IV}{=} \sum_{j=1}^{n-1} (b \cdot a_j) + (b \cdot a_n) = \sum_{j=1}^{n} (b \cdot a_j) \quad \square \end{aligned} \tag{II.2}$$

Für ein zweites Zahlentupel $(b_i)_{i=1}^m \in \mathbb{K}^m$ folgt somit:

$$\underbrace{(\sum_{i=1}^{m} b_i) \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_j)}_{1.)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} ((\sum_{i=1}^{m} b_i) \cdot a_j)}_{2.)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (b_i \cdot a_j)}_{3.)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_j)}_{4.)} \tag{II.3}$$

Frage: Wieviele Operationen brauche ich, um diesen Aussdruck in verschiedenen Formen auszuwerten?

	1.)	2.)	3.)	4.)
Additionen :	$(m + n - 2)$	$(m - 1) + (n - 1)$	$mn - 1$	$m + n - 2$
Multiplikationen :	1	n	mn	m

Fazit: Im Allgemeinen lohnt es sich, gemeinsame Faktoren aus Summen heraus zu ziehen, um die Anzahl der binären Operationen zu reduzieren.

Allgemeine Summen- und Produktnotation:

$$\sum_{j=m}^{n} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n-m+1} a_{m+1-1} & \text{, falls } n \geq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \prod_{j=m}^{n} = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n-m+1} a_{m+1-1} & \text{, falls } n \geq m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Spezialfall: $n! := \prod\limits_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ falls $n \geq 1$ und $0! = 1$.

Dabei wird die Rekursion erhalten: $(n-1)! = \frac{n!}{n} \Rightarrow n = 1 : 0! = \frac{1!}{1} = 1$

4.6 Definition: Binominalkoeffizient

Der Binominalkoeffizienten für $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n - j) = \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \tag{II.4}$$

und läßt sich verallgemeinern für $n \in \mathbb{Z}$ oder sogar $n \in \mathbb{R}$.

4.7 Lemma: Eigenschaften des Binominalkoeffizienten

i). $\binom{n}{k} \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ii). $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

Beweis

ii). Beweis von ii.) unter Nutzung von i.). Fallunterscheidung:

Fall 1: $n = k : \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$
Fall 2: $n > k :$

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \square\end{aligned} \tag{II.5}$$

Potenznotation: $x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n-mal} = \prod_{j=1}^{n} x \Rightarrow x^0 = 1$

4.8 Satz: Binominalsatz

Für $x, y \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} \tag{II.6}$$

Beweis

- Induktionsanfang $n = 1 :$

$$\Rightarrow (x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{0}{0} x^0 y^1 \tag{II.7}$$

- Induktionsschritt $n - 1 \to n :$

$$\begin{aligned}(x+y)^n = (x+y)^{n-1} \cdot (x+y) &\overset{IV}{=} \sum_{k=0}^{n-1} [\binom{n-1}{k} \cdot x^k y^{n-k-1}](x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [\binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \binom{n-1}{n-1} x^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n-1}{0} y^n \\ &= x^k + \sum_{k=1}^{n-1} [\binom{n-1}{k-1} x^k y^{n-k} + \binom{n-k}{k} x^k y^{n-k}] + y^n \\ &= \binom{n}{n} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{0} y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \square\end{aligned} \tag{II.8}$$

5 Anordnung, Absolutbetrag, Minimum und Maximum

Im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ lässt sich $\mathbb{R}$ und jeder Teilkörper von $\mathbb{R}$ linear auf der " Zahlengerade" anordnen.
Anordnungsaxiome in $\mathbb{R}$: Es gilt:

IV.1. Entweder $(x < y)$ oder $(x = y)$oder $(x > y)$ (Trichotomoie)

IV.2. $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$ (Transitivität)

IV.3. $(x < y) \wedge z \in \mathbb{R} \Rightarrow z + x < z + y$ (Monotonie der Addition)

IV.4. $(x < y) \wedge (0 < z \in \mathbb{R}) \Rightarrow zx < zy$ (Semi-Monotonie der Multiplikation)

Notation: $x \leq y \Leftrightarrow (x < y \vee x = y) \Leftrightarrow y \geq x$ und wir definieren

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x > 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

5.1 Lemma: Eigenschaften des Betrages

i). $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

ii). $|xy| = |x||y|$ (Homogenität)

iii). $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

iv). $|x - y| \geq ||x| - |y||$ (inverse Dreiecksungleichung)

Bemerkung: Das Lemma gilt auch für die Verallgemeinerung des Betrages $|x|$ von Zahlen $x \in \mathbb{R}$ auf Normen $||x|| \in \mathbb{R}$ von Vektoren x in endlich oder unendlich dimensionalen Räumen, wie zum Beispiel im $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm, woher die Dreiecksungleichung ihren Namen hat.

Beweis

iii). Beweis von iii) durch Fallunterscheidung:

- $x \geq 0$ und $y \geq 0$: $\Rightarrow 0 \leq x + y = |x + y| = |x| + |y|$
- $x \leq 0$ und $y \geq 0$:
- $x \leq -y \Rightarrow x + y \leq 0 \Rightarrow |x+y| = -(x+y) = -x-y$ und $-x \leq |x|$, $-y \leq |y| \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$
- $x > -y \Rightarrow x + y > 0 \Rightarrow |x + y| = x + y$ und $x \leq |x|, y \leq |y| \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$

- $x \geq 0$ und $y \leq 0$: Behauptung folgt aus Symmetrie.
- $x \leq 0$ und $y \leq 0$:

$$\Rightarrow 0 \geq x + y = -|x + y| = -(-x) + (-(-y)) = -|x| - |y|$$
$$\Rightarrow |x + y| = |x| + |y|$$

iv). Folgt aus zwei gemäß:

$$|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$
$$|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x|$$
$$\Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

5.2 Definition: max und min

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq y \\ y & \text{, falls } y \geq x \end{cases} \qquad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{, falls } x \leq y \\ y & \text{, falls } y \leq x \end{cases}$$

Folgerung: Auf der Menge der reellen Zahlen erfüllen die binären Operationen $\min(x,y)$ und $\max(x,y)$ die folgenden Eigenschaften:

i). Kommutativität: $\min(x,y) = \min(y,x)$ beziehungsweise $\max(x,y) = \max(y,x)$

ii). Assoziativität: $\min(x, \min(y,z)) = \min(\min(x,y),z)$ beziehungsweise $\max(x, \max(y,z)) = \max(\max(x,y),z)$

iii). Distributivität: $\max(\min(x,y),z) = \min(\max(x,z), \max(y,z))$ beziehungsweise $\min(\max(x,y),z) = \max(\min(x,z), \min(y,z))$

Beweis

Wurde in der Übung erarbeitet.

Bemerkung: Es gibt in $\mathbb{R}$ kein neutrales Element bezüglich min und max:

$$\min(x,u) = x \ \forall \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow u = \infty \notin \mathbb{R}$$

Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ um $\pm\infty$ verletzt die Körperaxiome.

Verallgemeinerung: Genauso wie Summe, Produkt und andere sowohl kommutative wie assoziative Operationen, lässt sich auch min und max auf endliche Argumenttupel $(a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ übertragen:

$$\max((a_j)_{j=1}^n) := \max(\max((a_j)_{j=1}^{n-1}, a_n) = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Für min gilt diese Übertragung ebenso.
Frage: Kann man auch max und min von unendlich langen Tupeln (Folgen) oder unendlichen Mengen reeller Zahlen bilden?
Antwort: In gewissem Sinne ja, vorausgesetzt, die Vollständigkeit des geordneten Zahlenkörpers ist sichergestellt.

6 Vollständigkeit der reellen Zahlen

6.1 Definition: Beschränktheit und Schranken

In einem Körper $\mathbb{K}$, der die Axiome I-IV erfüllt, definieren wir für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$:

i). $s \in \mathbb{K}$ als obere Schranke von M, falls $\forall\, a \in M : a \leq s$

ii). M heißt nach oben beschränkt, falls ein solches $s \in \mathbb{K}$ existiert.

In derselben Weise definieren wir auch eine untere Schranke von M und nennen dann M nach unten durch jenes $s \in \mathbb{K}$ beschränkt.
Falls M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, heißt M beschränkt, ansonsten unbeschränkt.

6.2 Definition: Supremum und Infimum

Eine obere Schranke $s \in \mathbb{K}$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von M, falls : $\forall\ s' \in \mathbb{K}$, s' obere Schranke , gilt: $s \leq s'$. Es gibt höchstens ein solches Supremum und man schreibt: $s = \sup(M)$. Gilt für $s \in \mathbb{K} : s \in M$, so heißt es auch Maximum von M und man schreibt: $s = \sup(M) = \max(M)$.
Auf gleicher Weise definieren wir das Infimum und das Minimum. Es gilt: $\inf(M) \leq a \leq \sup(M) \forall a \in M$.

Beispiele

1.): Jede endliche Menge M läßt sich durchnummerieren, so dass $M = \{a_j\}_{j=1}^n$ und $\inf(M) = \min(M) = \min(\{a_j\}_{j=1}^n) \leq \sup(M) = \max(M) = (\{a_j\}_{j=1}^n)$

2.): $M = \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ hat $\inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N}) = 1$. $\mathbb{N}$ ist aber nach oben unbeschränkt, da nach dem Archimedischen Gesetz gilt: $\forall\ x \in \mathbb{Q}\,\exists\, n \in :n > x$.
Mit anderen Worten: $\mathbb{N}$ hat keine obere Schranke $x \in \mathbb{Q}$. Diese Aussage folgt später aus Axiom V, dem Supremumsprinzip.

3.): $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ hat das $\sup(M) = \max(M) = 1$ und $\inf(M) = 0 \neq \min(M)$, da nach Archimedes: $\mathbb{Q} \ni s \leq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \frac{p}{q} \leq \frac{1}{n}\,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (p = 0 \vee n \leq \frac{q}{p}\,\forall\, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow s = 0$ ist tatsächlich größte untere Schranke.

4.): $M \equiv \{0 \leq x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ hat $\inf(M) = 0 = \min(M)$ und ist nach oben beschränkt. In Übung zu zeigen: Mit Hilfe von Archimedes und der Binominalformel, dass M kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat.

6.3 Axiom V: Vollständigkeit

jede nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum $\sup(M)$.

Bemerkung: Da für M nach unten beschränkt gilt $\inf(M) = -\sup(-M)$ (Übung), folgt: jede nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum $\inf(M)$.
Deswegen kann nur die Existenz einer der beiden für entsprechend beschränktes M angenommen werden.
Wie auch bei anderen Axiomen bleiben wir den Beweis schuldig, daß diese Eigenschaften wirklich erzielt werden können. Ein konstruktiver Beweis über Dedekindsche Schnitte oder Cantorsche Fundamentalfolgen ist möglich.

Folgerung: Axiom V impliziert, daß $\forall\ 0 < x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x < n$.

Beweis: Annahme, die rechte Ungleichung gilt nicht $\Rightarrow x \geq n\,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ ist durch x nach oben beschränkt und muss nach Axiom V ein Supremum s haben $\Rightarrow s - 1$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, so daß $s - 1 < n$ für ein $n \in \mathbb{N} \Rightarrow s < n + 1 \Rightarrow s$ ist auch keine obere Schranke im Widerspruch zur Annahme.
Beweis für $\frac{1}{n}$ analog.

6.4 Satz: Existenz, Eindeutigkeit und Monotonie der Wurzelfunktion

Für $0 < c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $0 < x \in \mathbb{R}$, so daß $x^n = c$. Dieses x wird mit $\sqrt[n]{c}$ bezeichnet und ist monoton bezüglich c, daß heißt $c' \geq c \Rightarrow \sqrt[n]{c'} \geq \sqrt[n]{c}$.

Beweis

Zunächst gilt für $0 < x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x^n - y^n) = (x - y) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j} = (x - y)(y^{n-1} + xy^{n-2} + \ldots + x^{n-1}) \Rightarrow x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n, \quad \text{(II.9)}$$

das heißt die Potenz x^n ist für $x > 0$ eine streng monotone Funktion. Außerdem gilt:
$M := \{0 \leq y \in \mathbb{R} : y^n \leq c\} \neq \emptyset$, da $0 \in M$ und die Menge ist nach oben beschränkt, da $(1+c) \notin M$, weil gilt: $(1 + c)^n = \sum_{j=0}^n c^j \cdot \geq c + 1 > c$.

Setze $x = \sup(M) \leq 1 + c$, welches nach Axiom V existiert. Es gilt $x > 0$ weil : Sei $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > \max\{\frac{1}{c}, 2\}$ dann $\frac{1}{n_0} < c$, $\frac{1}{n_0} < 1$, dann $0 < (\frac{1}{n_0})^n < \frac{1}{n_0} < c$, dann ist $x > 0$. Nun bleibt zu zeigen, daß $x^n = c$ durch Ausschluß der Möglichkeiten $x^n < c$ und $x^n > c$.

Fall 1: $x^n > c$
Betrachte $(x - \frac{1}{m})$, $m \in \mathbb{N}, m > \frac{1}{x}$ und zeige, daß es für hinreichend großes m auch eine obere Schranke wäre:

$$(x - \tfrac{1}{m})^n = x^n(1 - \underbrace{\tfrac{1}{mx}}_{\leq 1 \text{ für } m > \frac{1}{x}})^n \underset{Bernoulli}{\geq} x^n(1 - \tfrac{1}{mx}) = (\tfrac{x^n}{c})(1 - \tfrac{n}{mx}) \cdot c > c$$
$$\Leftrightarrow (\tfrac{x^n}{c})(1 - \tfrac{n}{mx}) > 1 \Leftrightarrow 1 - \tfrac{n}{mx} > \tfrac{c}{x^n} \Leftrightarrow \tfrac{n}{mx} < 1 - \tfrac{c}{x^n} \Leftrightarrow m > \tfrac{n}{x(1-\frac{c}{x^n})} \tag{II.10}$$

Die letzte Bedingung wäre genau dann erfüllbar , wenn $1 > \frac{c}{x^n} \Leftrightarrow x^n > c$.
Das führt zum Widerspruch zur Supremumeigenschaft, so daß $x^n \leq c$ sein muss.

Fall 2: $x^n < c$
Betrachte $(x + \frac{1}{m})$ und zeigen daß es für hinreichend großes m auch noch zu M gehört, im Widerspruch zur Supremumeigenschaft.

$$\begin{aligned}(x + \frac{1}{m})^n &= x^n(1 + \tfrac{1}{mx})^n = x^n \cdot \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j}(\tfrac{1}{mx})^j \leq x^n \cdot \sum_{j=0}^{n} (\tfrac{n}{mx})^j \\ &= x^n \cdot \frac{(\frac{n}{mx})^n - 1}{\underbrace{\frac{n}{mx}}_{<1 \text{ für } m > \frac{n}{x}} - 1} = x^n \cdot \frac{1 - (\frac{n}{mx})^{n+1}}{1 - \frac{n}{mx}} \leq \frac{x^n \cdot c}{c \cdot (1 - \frac{n}{mx})} < c \\ &\Leftrightarrow \frac{x^n}{c \cdot (1 - \frac{n}{mx})} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^n}{c} < 1 - \frac{n}{mx}\end{aligned} \tag{II.11}$$

Die letzte Ungleichung ist genau dann erfüllbar durch großes m, falls $\frac{x^n}{c} < 1$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Supremumeigenschaft von x.

Die Monotonie folgt aus $x' = \sup(M') \geq \sup(M) = x$ für $M' \equiv \{0 \leq y : y^n \leq c'\} > M$.

Bemerkung: Obiger Existenzbeweis für $\sqrt[n]{c}$ ist nicht konstruktiv, das heißt, er gibt kein Verfahren an, mit dem diese Zahl berechnet werden kann, das heißt beliebig nahe durch $\tilde{x} \in \mathbb{Q}$ angenähert werden kann.

Kapitel III

Folgen und Reihen

7 Folgen und Konvergenz

7.1 Definition: Folge

Abstrakt ist eine reelle Folge eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, wobei man üblicherweise direkt die Bilder $x_n = f(n) \in \mathbb{R}$ angibt und die Gesamtfolge hinschreibt als:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n\geq 1} \text{ oder } (x_n)$$

Häufig wird (x_n) auch rekursiv definiert, daß heißt es gibt eine Funktion $g(x, n) = \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so daß $x_{n+1} = g(x_n, n)$ mit x_0 oder x_1 gegeben.

Beispiel

$x_n = \frac{1}{n!} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}$ mit $x_1 = 1! = 1$

Bemerkung: Zwei Folgen (x_n) und $(\tilde{x}_n)$ gelten als äquivalent, falls für ein festes m und alle n gilt: $\tilde{x}_n = x_{n+m}$.
Mit anderen Worten: Ein jeweils endliches Anfangssegment ist von geringem Interesse, man untersucht bei Folgen die Eigenschaften des unendlichen Rest an Folgegliedern.

7.2 Definition: Konvergenz einer Folge

Eine Folge (x_n) heißt gegen den Grenzwert a konvergent, falls:

$$\forall\ \epsilon\ > 0\ \exists\ n(\epsilon) \in \mathbb{N}: \ \ n \geq n(\epsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \tag{III.1}$$

Man schreibt dann auch $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ oder $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.
Falls a existiert, heißt die Folge konvergent, sonst divergent.

Bemerkung: Die obige Definition ist eindeutig, da (x_n) höchstens einen Grenzwert haben kann.
Beweis: Annahme, (x_n) hat die Grenzwerte $\tilde{a} \neq a$. Dann existiert für $\epsilon = \frac{|a-\tilde{a}|}{3}$ zwei untere Schranken $n(\epsilon)$ und $\tilde{n}(\epsilon)$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} |x_n - a| < \epsilon \text{ für } n \geq n(\epsilon) \\ |x_n - \tilde{a}| < \epsilon \text{ für } n \geq \tilde{n}(\epsilon) \end{aligned} \tag{III.2}$$

Daraus folgt für $n \geq \max(n(\epsilon), \tilde{n}(\epsilon))$:

$$\begin{aligned} |a - \tilde{a}| &= |a - x_n + x_n - \tilde{a}| \leq |a - x_n| + |x_n - \tilde{a}| \leq \epsilon + \epsilon \\ &= \tfrac{2}{3}|a - \tilde{a}| < |a - \tilde{a}| \end{aligned} \tag{III.3}$$

Also führt die Annahme, dass $|a - \tilde{a}| \neq 0$, zu einem Widerspruch!

7.3 Lemma: Beschränktheit konvergenter Folgen

Jede konvergente Folge ist beschrfänkt in dem Sinne, dass die Menge $f(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschrfänkt ist.

Beweis

Wegen der Konvergenz existiert für $\epsilon = 1$ ein $n(1)$, so dass $|x_n - a| \leq 1 \Rightarrow x_n \leq a + 1$ für $n \geq n(1)$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $x_n \leq \max(x_1, \ldots, x_{n(1)-1}, a + 1)$ und entsprechend $x_n \geq \min(x_1, \ldots, x_{n(1)-1}, a - 1)$ $\square$

Beispiele

Sei $0 < c \in \mathbb{R}$:

- konstante Folge: $x_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} = c$
- lineare Folge : $x_n = c \cdot n \Rightarrow$ die Folge ist unbeschränkt, da kein Grenzwert existiert.
- reziproke Folge : $x_n = \frac{1}{n^c} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
  Begründung: $|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n^c} < \epsilon$ für große $n \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt[c]{\epsilon}} \Rightarrow n(\epsilon) = \sqrt[c]{\frac{1}{\epsilon}} = \lceil x \rceil$ mit $\lceil x \rceil$ kleinste obere Schranke aus $\mathbb{N}$ für $x \in \mathbb{R}$.

7.4 Definition: Monotonie

Eine Folge heißt monoton steigend beziehungsweise fallend für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn gilt: $x_n \leq x_{n+1}$ beziehungsweise $x_n \geq x_{n+1}$.
Wenn sogar $<$ beziehungsweise $>$ gilt, heißt die Folge streng monoton steigend oder fallend.

7.5 Satz: Konvergenz monotoner, beschränkter Folgen

Jede monoton steigende nach oben beschränkte Folge beziehungsweise jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert und zwar gegen $\sup(x_n : n \in \mathbb{N})$ beziehungsweise $\inf(x_n : n \in \mathbb{N})$.

Beweis

Für beliebiges $\epsilon > 0$ kann $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} - \epsilon = a - \epsilon$ keine obere Schranke von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein. Also existiert ein $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $x_{n(\epsilon)} \geq a - \epsilon \leq a \Rightarrow |x_n - a| \leq \epsilon \ \ \forall \ n \geq n(\epsilon)$. Entsprechendes gilt für inf bei monoton fallenden Folgen $\square$.

Frage: Konvergiert die rekursiv definierte Folge: $x_{n+1} = 2x_n - cx_n^2$, mit $c > 0$?
Antwort: Die Konvergenz hängt vom Anfang x_0 ab.
Bemerkung: Solche Folgen beziehungsweise die entsprechende Bildungsvorschrift werden auch als Iteration bezeichnet.

Fallunterscheidung:

Fall 1): $x_0 < 0$:

$$\Rightarrow x_1 = 2x_0 - x_0^2 c = x_0(\underbrace{2 - cx_0}_{\geq 0}) \tag{III.4}$$

$$\Rightarrow x_1 < 0 \wedge \frac{|x_1|}{|x_0|} \geq 2 \tag{III.5}$$

Per Induktion folgt: $x_n < 0 \wedge |x_n| \geq 2|x_{n-1}| \geq 4|x_{n-2}| \geq \ldots \geq 2^n|x_0|$
$\Rightarrow$ Die Folge wächst unbeschränkt und divergiert gegen $-\infty$

Fall 2): $x_0 = 0$:
$\Rightarrow x_1 = x_n = 0 \;\; \forall\; n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Fall 3): $0 < x_0 \leq \frac{1}{c} \Leftrightarrow 0 < cx_0 \leq 1$:

$$x_1 = 2x_0 - cx_0^2 = x_0(2 - cx_0) > 0 \tag{III.6}$$

$$\Rightarrow 0 \leq cx_1 = 2cx_0 - c^2x_0^2 = 1 - (cx_0 - 1)^2 \leq 1 \tag{III.7}$$

$$\overset{\text{per Ind.}}{\Rightarrow} 0 < cx_n \leq 1 \Rightarrow (x_n) \text{ beschränkt} \tag{III.8}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = 2x_n - x_n - cx_n^2 = x_n(1 - cx_n) \geq 0 \tag{III.9}$$

Die Folge ist nach oben und unten beschrünkt und monoton wachsend $\Rightarrow$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} = \sup(x_n : n \in \mathbb{N}) = s$ existiert und ist $\leq \frac{1}{c}$.
Vorgriff auf Grenzwertsätze ergibt als Grenzwert:$x_{n+1} = 2x_n - cx_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} s = 2s - cs^2 \Rightarrow s = \frac{1}{c}$

Fall 4): $\frac{1}{c} < x_0 < \frac{2}{c}$

$$x_1 = 2x_0 - cx_0^2 = x_0(2 - cx_0) \geq 0 \tag{III.10}$$

$$\Rightarrow cx_1 = cx_0(2 - cx_0) = 1 - (1 - cx_0)^2 \leq 1 \tag{III.11}$$

$$\Rightarrow x_1 \leq \tfrac{1}{c}, x_1 > 0 \tag{III.12}$$

Ab der zweiten Iteration ergibt sich somit Fall 3, also monotone Konvergenz zu $a = \frac{1}{c}$.
Beachte: Der erste Iterationsschritt hat keine Bedeutung für die Monotonität der Restfolge: $x_0 > x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$

Fall 5): $x_0 = \frac{2}{c}$
$\Rightarrow x_1 = x_n = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$

Fall 6): $x_0 > \frac{2}{c}$
$\Rightarrow x_1 = x_0(\underbrace{2 - cx_0}_{<0}) < 0$, dass heißt Fall 1 gilt.

8 Grenzwertsätze

8.1 Satz: Grenzwertsätze

Falls (x_n) und (y_n) gegen a und b konvergieren, gilt:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$ (Additivität)

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$ und insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca$ (Homogenität)

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$, vorausgesetzt $b \neq 0$

Eigenschaft i.) und ii.) ergeben zusammen die Linearität des Grenzwertes.
Bemerkung: Das Aufschreiben von $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n)$ impliziert bereits die Existenz dieses Ausdruckes.

Beweis

Seien $n_x(\epsilon)$ und $n_y(\epsilon)$ Schrankenfunktionen, sodass $|x_n - a| < \epsilon$ für $n \geq n_x(\epsilon)$ und $|y_n - b| < \epsilon$ für $n \geq n_y(\epsilon)$

i) Dann folgt für beliebiges $\epsilon > 0$ und $n \geq n(\epsilon) = \max)n_x(\frac{\epsilon}{2}), n_y(\frac{\epsilon}{2}))$, dass

$$|x_n - a| < \tfrac{\epsilon}{2} \wedge |y_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} \tag{III.13}$$
$$\overset{\triangle-Ungl.}{\Rightarrow} |x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \tag{III.14}$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < 2\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{III.15}$$

$\Rightarrow a \pm b$ ist tatsüchlich Grenzwert von $x_n \pm y_n$.

ii) Da (y_n) konvergiert, hat es eine obere Schranke s. Außerdem nehme an $a \neq \emptyset$. Dann folgt:

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| \tag{III.16}$$
$$\leq |x_n - a|s + |a||y_n - b| < \epsilon \tag{III.17}$$
$$\Rightarrow n \geq \max(n_x(\tfrac{\epsilon}{2s}), n_y(\tfrac{\epsilon}{2|a|})) \vee (a = 0 \wedge n \geq n_x((\tfrac{\epsilon}{s})) \tag{III.18}$$

iii) Betrachte zunächst nur den Spezialfall $(x_n) = 1$ und $b > 0$.
Dann gilt für $n \geq \max(n_y(\frac{b}{2}), n_y(\epsilon \cdot \frac{b^2}{2})) = n_y(\min(\frac{b}{2}, \frac{\epsilon}{2}))$: $|y_n - b| \leq \frac{b}{2} \Rightarrow y_n \geq \frac{b}{2}$
$\Rightarrow |\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b-y_n}{b|y_n|}| \leq \frac{|b-y_n|}{b \cdot \frac{b}{2}} < \epsilon \quad \square$

Warnung: $\lim_{n\to\infty} x_n \circ y_n$ kann auch dann existieren und wohldefiniert sein, wenn Satz 7.1 nicht anwendbar ist, da (x_n) oder (y_n) nicht definiert sind.

Beispiele:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + \underbrace{(-x_n)}_{y_n}) = 0$, selbst wenn $x_n = n^3 2$ und somit selbst keinen Grenzwert hat.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^c} y_n) = 0$ falls (y_n) beschränkt und $c > 0$.

8.2 Satz: Monotonie des Grenzwertes

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ und (z_n) beliebig, so folgt aus $x_n \leq z_n \leq y_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = b$$
$$\text{und aus } a = b \text{ impliziert: } a = b = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Beweis

Angenommen $b < a$, so gilt für $\epsilon = \frac{(a-b)}{3} = \frac{|b-a|}{3}$ und $n \geq \max(n_x(\epsilon), n_y(\epsilon))$ mit n_x und n_y so dass $|x_n - a| < \epsilon \; \forall \; n \geq n_x(\epsilon), |y_n - a| < \epsilon \; \forall \; n \geq n_y(\epsilon)$, dann:

$$|x_n - a| < \epsilon \Rightarrow x_n > a - \epsilon, |y_n - b| < \epsilon \Rightarrow y_n < b + \epsilon \Rightarrow 0 \leq y_n - x_n < b + \epsilon - a + \epsilon \tag{III.19}$$
$$= -(a - b) + (a - n)\tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3}(a - b) < 0 \text{ Widerspruch} \tag{III.20}$$

Restlichen Beweis als Übung.

8.3 Lemma: Folgeneigenschaft vom Supremum/Infimum

Für $M \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$s = \sup(M) \Leftrightarrow s \geq x \; \forall \; x \in M \wedge \; \exists \; (x_n) \subset M : \lim_{n\to\infty} x_n = s$$

Entsprechend für $\inf(M)$.

Beweis

"⇒":s aber nicht $s - \frac{1}{n}$ ist obere Schranke. Es gibt also jeweils ein mit x_n bezeichnetes Element, so dass $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \Rightarrow |x_n - s| \leq \frac{1}{n} = \epsilon$. Also bilden die so konstruierten x_n eine gegen s konvergierende Folge aus M.

"⇐": s obere Schranke. Annahme: $s' = s - \epsilon$ wäre auch obere Schranke. Dann existiert ein $n = n(\epsilon)$, so dass $|s - x_n| < \epsilon$ für $n \geq n(\epsilon) \Rightarrow x_n > s - \epsilon = s'$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Supremumeigenschaft von s'

8.4 Definition: Nullfolgen und uneigentliche Grenzwert

i) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt Nullfolge, falls $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

ii) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ divergiert gegen ∞, in Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) : x_n > \frac{1}{\epsilon} \forall n \geq n(\epsilon)$

iii) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ divergiert gegen $-\infty$falls $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = \infty$

Bemerkung: Im Falle ii.) und iii.) nennt man $\pm\infty$ auch uneigentlichen Grenzwert und sagt häufig, (x_n) konvergiert oder divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$.

8.5 Lemma: Grenzwert des Kehrwertes bestimmt divergenter Folgen

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$
Mit anderen Worten: Der Kehrwert bestimmt divergenter Folgen ist eine Nullfolge.

Beweis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \Rightarrow \ \forall\ \epsilon\ \exists\ n(\epsilon) : |x_n| > \frac{1}{\epsilon}\ \forall\ n \geq n(\epsilon) \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} = |\frac{1}{|x_n|} - 0| < \epsilon\, \forall\, n \geq n(\epsilon) \quad \text{(III.21)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \text{ ist Nullfolge } \quad \square \quad \text{(III.22)}$$

Bemerkung: Die Umkehrung von 7.5 ist nicht wahr.

Beobachtung: Die Grenzwertsätze sind auf uneigentliche Grenzwerte bedingt erweiterbar, dass heißt für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm z_n) = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot z_n) = \text{sign}(c) \cdot \infty$ falls $c \neq 0$

Keine Aussage kann jedoch in folgenden Fällen gemacht werden:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot z_n)$ falls $c = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n})$

9 Teilfolgen, Bolzano-Weierstrass und Cauchy

Vorbemerkung: Für reelle Folgen gilt immer: Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie die Beispiele $x_n = \sin(n)$ und $x_n = (-1)^n$ zeigen.
In beiden Fällen existieren jedoch Teilfolgen, die konvergieren. Dies gilt für alle beschränkten Folgen nach dem unten noch zu beweisenden Satz von Bolzano-Weierstrass.

Warnung: Dies gilt jedoch nicht in unendlichdimensionalen Räumen wie der Menge der invarianten Polynome oder der Menge stetiger Funktionen auf endlichen Intervallen!

Wir definieren $(\tilde{x}_n) \subset \mathbb{R}$ als Teilfolge von $x_n \subset \mathbb{R}$, falls es eine streng monoton steigende Indexfunktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, mit $\tilde{x}_n = x_{h(n)}$
s heißt Häufungspunkt, falls $s = \lim_{n\to\infty}(\tilde{x}_n)$ für eine Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ von ursprunglichen (x_n) ist.

Bemerkung: Sehr häufig wird die Indexfunktion nicht explizit angegeben, sondern mittels eines beliebigen Kriterium von den Gliedern von x_n ausgewählt, zum Beispiel: $\tilde{x}_n =$ (alle positiven $\sin(n)$). Dann ist nicht immer a priori klar, dass die Teilfolge tatsächlich unendlich viele Glieder enthält, wie eigentlich für Teilfolgen verlangt. Dies muss dann gegebenenfalls verifiziert werden.

9.1 Lemma: Konvergenz der Teilfolgen einer konvergenten Folge

i) Jede Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ einer gegen a konvergenten Folge (x_n) hat genau denselben Grenzwert $\lim(\tilde{x}_n) = a$.

ii) Jede Folge hat monotone Teilfolgen, die steigend oder fallend sein kann.

Beweis

i) Per Induktion lässt sich leicht zeigen, dass $h(n) \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $h(n)$ die Indexfunktion von $(\tilde{x}_n)$. Aus der Konvergenz von (x_n) folgt:
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n(\epsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \epsilon\ \forall\ n \geq n(\epsilon) \Rightarrow |x_{h(n)} - a| < \epsilon$ da $h(n) \geq n \geq n(\epsilon)$
Also konvergieren auch die Teilfolgen gegen a.

ii) Bezeichne alle Elemente x_n, für die gilt: $n' > n \Rightarrow x_{n'} \leq x_n$ als Spitzen der Folge (x_n). Diese bilden dann eine monoton fallende Teilfolge, die allerdings nicht notwendigerweise unendlich viele Elemente hat oder under Umständen sogar leer ist. Wenn nur endlich viele Spitzen vorhanden sind, bleibt zu zeigen, dass es dann eine monoton steigende Teilfolge gibt (siehe Übung).

Bemerkung: Aus Lemma 9.1 ergibt sich als Korollar unmittelbar folgender Satz:

9.2 Satz: Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge und damit mindestens einen Häufungspunkt.
Mit anderen Worten: Aus jeder beschränkten nicht endlichen Menge lässt sich eine konvergente Teilfolge $(x_n) \subset M$ bilden.

Beweis

Nach Lemma 9.1 existieren monotone Teilfolgen, die sicherlich auch beschränkt sind und deshalb einen Grenzwert a besitzen. Dieser ist laut Definition Häufungspunkt $\square$

Beispiele

1) $(x_n) = ((-1)^n)_n$ hat die konstanten Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Grenzwerten 1 und -1, welche die Häufungspunkte von (x_n) sind.

2) $x_n = \sin(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ hat jede beliebigen Wert $s \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ als Häufungspunkt.

Bemerkung: Letzteres ist erstaunlich, da die per Definition abzählbare Menge von Folgengliedern eine, wie wir sehen werden, überabzählbare Menge von Häufungspunkten erzeugt. Das verlangt, dass es überabzählbar viele Teilfolgen gibt, die jeweils höchstens einen Grenzwert haben können. Dies ist in der Tat der Fall und folgt aus dem Diagonalisierungsargument: Jede Teilfolge einer festen Grundfolge lässt sich eindeutig charakterisieren durch ein Element von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dass heißt einer Folge von 0 und 1, sodass n-tes Glied 1 ist, genau dann wenn jenes Glied zur Teilfolge gehört. Angenommen die Menge aller binären Folgen ließe sich durchnummerieren und entsprechend untereinander auflisten. Dann können wir durch die Modifikation aller diagonalen Elemente, dass heißt Austauschen von 0 und 1, eine neue Folge konstruieren, die noch nicht in der Liste enthalten ist. Dies führt zum Widerspruch der angenommenen Abzählbarkeit der Anzahl der Teilfolgen.

Rückblick: Nach Bolzano-Weierstrass hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge und somit einen Häufungspunkt.

9.3 Satz: Direkte Charakterisierung von Häufungspunkten

$a \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt einer Folge $(x_n) \Leftrightarrow\ \forall\ \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}\ \exists\ m > n$ mit: $|x_m - a| < \epsilon$
$a \in \mathbb{R}$ ist genau dann kein Häufungspunkt von (x_n), wenn $\ \exists\ \epsilon > 0, n \in \mathbb{N} :\ \ \forall\ m > n$ gilt: $|x_m - a| \geq \epsilon$

Beweis

"$\Rightarrow$": Nach Definition existiert eine Teilfolge $(x_{h(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen a konvergiert. Also existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein h(n), dass beliebig groß gewählt werden kann, so dass für $n < h(n) = m$ gilt: $|x_m - a| = |x_{h(n)} - a| < \epsilon$.
"$\Leftarrow$": Setze $\epsilon = \frac{1}{n}$ und finde $m(n) \geq n$, so dass $|x_m - a| < \epsilon$. Diese $x_{m(n)}$ bilden eine unendliche Teilfolge, die gegen a konvergiert. Also ist a tatsächlich ein Häufungspunkt.
Bemerkung: Wie in der Übung zu beweisen, ist die Bedingung $\ \forall\ \epsilon > 0\, \exists\, m : 0 < |x_m - a| < \epsilon$ hinreichend, aber nicht notwendig für die Häufungspunkt-Eigenschaft von a.
Vorbemerkung: Meistens interessiert man sich nicht für alle Häufungspunkte, sondern nur für die kleinsten und größten Häufungspunkte einer Folge.

9.4 Satz: Limes superior und Limes inferior

Für eine nach oben beschränkte Folge (x_n) bezeichne mit $H \subset \mathbb{R}$ die Menge aller Häufungspunkte. Dann hat H ein Supremum, welches als Maximum angenommen wird und mit Limes superior bezeichnet wird.

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup(H) = \max(H)$$

Entsprechend gilt fur eine nach unten beschränkte Folge (y_n):

$$\lim_{n\to\infty} \inf y_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \inf(H) = \min(H)$$

Beweis

In der Übung zu zeigen: Ist mit (x_n) auch $H \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so dass $s = \sup(H)$ wirklich existiert. Nach der Folgencharakterisierung von $\sup(H)$, existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus H mit $a_n \to s$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|a_n - s| < \frac{1}{n}$ immer erreichbar durch Bildung einer Teilfolge.

$$\forall\, a_n\ \in H\ \exists\ x_m = x_{m(n)} \in (x_n) : |x_{m(n)} - a_n| < \tfrac{1}{n} \tag{III.23}$$
$$\Rightarrow |x_{m(n)} - s| \leq |x_{m(n)} - a_n| + |a_n - s| < \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n} \tag{III.24}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_{m(n)} - s| \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{2}{n} = 0, \tag{III.25}$$

dass heißt: s ist Grenzwert der $(x_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit selbst ein Häufungspunkt.
Dies nennt man ein Diagonalargument, wobei $\iddots$ der Zahlenfolge $x_{m(n)}$ entspricht.

$$
\begin{array}{llllll}
a_1 & \leftarrow & x_{1n} & \dots & x_{12} & x_{11} \\
\vdots & & & & \iddots & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
\vdots & & \iddots & & & \\
a_n & \leftarrow & x_{nn} & \dots & x_{n2} & x_{n1} \\
\vdots & \iddots & & & & \\
s & & & & &
\end{array}
$$

9.5 Lemma: Direkte Charakterisierung von Limes superior und Limes inferior

$s := \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n \Leftrightarrow\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n = n(\epsilon) :\ \forall\ m \geq n(\epsilon) : x_m < s + \epsilon$, und s ist minimal bezüglich dieser Eigenschaft.
Entsprechendes für $\lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$.
Bemerkung: Ähnlich wie wirkliche Grenzwerte erfüllen auch $\underline{\lim}, \overline{\lim}$ bestimmte Rechenregeln, die die Auswertung und Abschätzung erleichtern.

9.6 Satz: Eigenschaften von Limes superior und Limes inferior

Für beschränkte Folgen $(x_n), (y_n)$ gilt:

i) Subadditivität: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n + y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} \sup(y_n)$

ii) Positive Homogenität: $c > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(cx_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n)$

iii) Sublinearität: $c < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(cx_n) = -c \lim\limits_{n\to\infty} \sup(-x_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} \inf(x_n)$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(x_n) \geq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} \inf(y_n) \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n) \lim\limits_{n\to\infty} \sup(y_n)$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(y_n) = b > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup(\frac{x_n}{y_n}) \leq \frac{1}{b} \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n)$

Beweis

v) $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n(\epsilon) \in \mathbb{N}, n \geq n(\epsilon) : a = \lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n), x_n \leq a + \epsilon,\ b - \epsilon \leq y_n$ für $n \geq n(\epsilon)$

Daraus folgt für $\epsilon \leq \frac{b}{2}$, dass

$$\tfrac{x_n}{y_n} \leq \tfrac{a+\epsilon}{b-\epsilon} = \frac{a+\epsilon}{b(1-\frac{\epsilon}{b}) \leq \frac{(a+\epsilon)}{b}(1+2\frac{\epsilon}{b})} \leq \tfrac{a}{b} + \tfrac{\epsilon}{b}\underbrace{(1+2\tfrac{\epsilon}{b})}_{\leq 2} + \tfrac{a}{b}2\tfrac{\epsilon}{b} \leq \frac{\lim\sup x_n}{\lim\inf y_n} + 2\tfrac{\epsilon}{b}[\tfrac{a}{b}+1] \tag{III.26}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \tfrac{x_n}{y_n} \leq \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} \inf(y_n)} + \lim_{\epsilon\to 0} 2\tfrac{\epsilon}{b}[\tfrac{a}{b}+1] = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sup(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} \inf(y_n)} \quad \square \tag{III.27}$$

Da allerdings gilt:

$$
\left.\begin{array}{ll}
a = \lim\sup(x_n) & \Rightarrow x_n < a + \epsilon. \\
b = \lim\inf(y_n) & \Rightarrow y_n > b - \epsilon.
\end{array}\right\} \forall\ n \geq n(\epsilon)
$$
$$\Rightarrow \forall\, n \geq n(\epsilon) : \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{a}{b} + \frac{2\epsilon}{b}(1 + \frac{b}{a}) \leq \frac{a}{b} + \tilde{\epsilon} \text{ mit } \tilde{\epsilon} = \epsilon\frac{2}{b}(1 + \frac{b}{a})$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{a}{b} \text{ ist nur eine obere Schranke!}$$

Frage: Lässt sich die Konvergenzeigenschaft einer beliebigen Folge (x_n) formulieren und gegebenenfalls untersuchen ohne schon explizit den Grenzwert a zu benennen?

Antwort: Ja, es gibt eine notwendige und hinreichende auf Cauchy zurückgehende Bedingung.

9.7 Satz: Cauchy-Folge

Eine reelle Folge konvergiert $\Leftrightarrow$ sie eine Cauchy-Folge ist, dass heißt die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\, n = n(\epsilon) \text{ so dass: } \forall\ m, m' \geq n \text{ gilt: } |x_m - x_{m'}| < \epsilon \tag{III.28}$$

Beweis

i) "$\Rightarrow$" : Sei $|x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $m \geq \tilde{n}(\epsilon)$, dann gilt für $m, m' \geq n(\epsilon)$:

$$|x_{m'} - x_m| = |x_{m'} - a + a - x_m| \overset{Dreiecksungl.}{\leq} |x_{m'} - a| + |a - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Mit anderen Worten Behauptung für $n(\epsilon) = \tilde{n}(\frac{\epsilon}{2})$

ii) "$\Leftarrow$": Zunächst folgt mit n_1 aus Cauchy-Kriterium, dass $|x_n| \leq \max(|x_1|, \ldots, |x_{n_1 - 1}|, |x_{n_1 + 1}|)$, da für $n \geq n_1$ sicher $|x_n - x_{n_1}| < 1 \Rightarrow |x_n| < |x_{n_1}| + 1$.
Also ist Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt nach Bolzano Weierstrass eine konvergierende Teilfolge $x_{m(n)} \to a$. Für beliebiges ϵ gibt es ein beliebig groß $m(n)$ mit $|x_{m(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und es gibt ein $n(\frac{\epsilon}{2})$, so dass für alle $m' > n(\frac{\epsilon}{2})$ gilt:

$$|x_{m'} - a| \leq |x_{m'} - x_{m(n)}| + |x_{m(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Also konvergiert die gesamte Folge (x_n) gegen a.

Bemerkung

Statt die Konvergenz aller Cauchy-Folgen auf Grundlage des postulierten Supremumsaxioms V mit Hilfe von Bolzano-Weierstrass zu beweisen, kann man die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ auch konstruktiv durchführen (Vergleich: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$). Dazu werden neue reelle Zahlen durch Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen definiert. Zwei Cauchy-Foglen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind äquivalent, falls:
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n(\epsilon) : |x_m - y_m| < \epsilon$, falls $m \geq n(\epsilon) \leq m'$.

Vergleich: Alle Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ sind äquivalent, wenn $mn' = m'n$ bei Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$. Da bei dieser Erweiterung wie bei Definition einer Cauchyfolge nur der Betrag/Abstand $|x - y|$, nicht aber die Anordnung der rationalen Zahlen vorkommt, lässt sich die Vervollständignung durch Cauchy-Folgen auch in nicht angeordneten Körpern wie $\mathbb{C}$ und allgemeinen metrischen Räumen durchführen.

10 Unendliche Zahlenreihen

10.1 Definition: Reihe

Für gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \supset \mathbb{R}$ bezeichnet man $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_n$ für festes n_0 und $n \in \mathbb{N}$ als die Folge der Partialsummen. Falls die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, schreibt man:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

Die rechte Seite nennt man unendliche Reihe und schreibt dies oft erstmal hin bevor die Frage der Konvergenz untersucht wird. Mit anderen Worten: Die Reihe ist eine abzählbare Menge von Summanden, die in vorgegebener Reihenfolge summiert werden sollen.

(z.B.: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ konvergiert nicht, noch nicht mal uneigentlich.)

Erläuterung zu n_o: Dieser Summationsanfang wird häufig als 0 oder 1 gewählt, hat aber sowieso keinen Einfluss auf Frage der Konvergenz. Es gilt für s_n definiert von n_0 und $s_{n'}$ definiert von $n_0' > n_0$:

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k = \overbrace{\sum_{k=n_0}^{n_0'-1} a_k}^{c \text{ unabh. von } n} + \sum_{k=n_0'}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n_0'-1} a_k + s_n' \tag{III.29}$$

$$\Rightarrow s_n = c + s_n' \tag{III.30}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = c + \lim_{n\to\infty} s_n' \tag{III.31}$$

In Reihenschreibweise: $\underset{kvg}{\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k} = \underset{\Leftrightarrow}{\sum_{k=n_0}^{n_0-1} a_k} + \underset{kvg}{\sum_{k=n_0'}^{\infty} a_k}$

Wie bei Folgen spielen endlich viele Anfangsglieder keine wesentliche Rolle!

Beispiele

i) $a_k = aq^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ hat Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = a\sum_{k=0}^{n} q^k = a\frac{(1-q^{n+1})}{1-q}$, falls $q \neq 1$

(a) $|q| < 1:$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^{n+1})}{(1-q)} = \frac{a}{(1-q)} \lim_{n\to\infty}(1-q^{n+1}) \tag{III.32}$$

$$= \frac{a}{(1-q)}(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}) = \frac{a}{1-q} \tag{III.33}$$

(b) $q > 1, a \neq 0:$

$\frac{a}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}) = sign(a)\infty$, unendlicher Grenzwert, bestimmte Divergenz

(b') $q = 1:$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \sum_{k=k}^{\infty} a1^k = \mathrm{sgn}(a)\infty$, unendlicher Grenzwert, bestimmte Divergenz.

(c) $q \leq -1:$

$\Rightarrow s_n = \frac{a}{(1-q)}(1 - q^{n+1})$ ist divergent, da$q^{2n'+1} \to -\infty$ und $q^{(2n'+1)+1} \to +\infty$ oder $s_n \in \{0, \frac{2a}{1-q}\}$ alternierend.

ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \tag{III.34}$$

$$\Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_n} = \underbrace{1 - \frac{1}{n+1}}_{monoton\ steigend} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \tag{III.35}$$

10.2 Satz: Cauchy-Kriterium für Reihen

Eine Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n(\epsilon) : |\sum\limits_{k=m+1}^{m'} a_n| < \epsilon$ falls $n(\epsilon) \leq m \leq m'$

Beweis

Konvergenz der Reihen $\Leftrightarrow s_n$ sind Cauchy-Folge und per Definition
$|s_{m'} - s_m| = |\sum\limits_{k=n_0}^{m'} a_k - \sum\limits_{k=n_0}^{m} a_k| = |\sum\limits_{k=m+1}^{m'} a_k| < \epsilon$ laut Cauchy-Kriterium.

Gegenbeispiel: Harmonische Reihe

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfüllt Cauchy-Kriterium nicht, da mit $p \in \mathbb{N}$für $m = 2^p$ und $m' = 2^{p+1}$ gilt:
$s_{m'} - s_m = \sum\limits_{k=1}^{m'} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum\limits_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} = \frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} \cdots \frac{1}{2^p+2^p} \geq \frac{2^p}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Da p und damit m,m' beliebig groß gewählt werden können, kann $|s_{m'} - s_m|$ nicht unter $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ gedrückt werden: $1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}} + \ldots$
Durch Induktion lässt sich überprüfen, dass $s_{(2^p)} \geq \frac{1}{2}(p+1)$ für $p \in \mathbb{N}$, dass heißt, die monoton wachsende Folge der Partialsummen s_n wächst also unbeschränkt undd wir haben bestimmte Divergenz zu ∞ (Divergenz der harmonischen Reihe).

10.3 Satz: allgemeine harmonische Reihe

siehe oben: Divergenz der harmonischen Reihen. Die Herleitung ergibt allgemeiner:
Für beliebigen Exponenten $c \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} \begin{cases} = \infty & \text{falls } c \leq 1 \\ \in (0, \infty) & \text{falls } c > 1 \end{cases}$
Mit anderen Worten: Für $c \leq 1$ divergiert die Reihe bestimmt gegen ∞ . Für $c > 1$ gibt es einen positiven endlichen Grenzwert.

Beweis

$c \leq 1 : \Rightarrow \frac{1}{k^c} = \frac{k^{1-c}}{k} \geq \frac{1}{k}$ da $k^{1-c} \geq 1$ für $c \leq 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^c} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ wegen Divergenz der harmonischen Reihe.
$c > 1 :$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^p-1} \frac{1}{(2^p+j)^c} = \underbrace{1}_{p=0} + \underbrace{\frac{1}{2^c} + \frac{1}{3^c}}_{p=1} + \underbrace{\frac{1}{4^c} + \frac{1}{5^c} + \frac{1}{6^c} + \frac{1}{7^c}}_{p=2} + \cdots \tag{III.36}$$

$$\leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{(2^p)^c} = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{p(1-c)} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(c-1)}}\right)^p \tag{III.37}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{(2^p)^c} = \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\overset{q}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2^{c-1}}}}\Big)^p}_{\text{geom. Reihe}} = \sum_{p=0}^{\infty} q^p = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{c-1}}} = \frac{2^{c-1}}{2^{c-1}-1} < \infty \tag{III.38}$$

Mit anderen Worten: Die Partialsummen $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^c}$ sind monoton steigend und beschränkt, also existiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} < \infty$

Bemerkung

Aus dem Cauchy-Kriterium folgt für $m = n + 1$, dass:
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n(\epsilon) : |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \epsilon$. Mit anderen Worten: $|a_k|$ müssen eine Nullfolge bilden für Konvergenz.
Wie man aus Satz 10.3 sieht, ist dies jedoch nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium, da für $0 < c \leq 1$ zwar $\frac{1}{k^c} \to a$, aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} = \infty$. Die $|a_k|$ müssen also im allgemeinen hinreichend schnell gegen Null konvergieren.
Ausnahme: alternierende Reihen.

10.4 Definition: alternierende Reihen

Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt alternierend, wenn für $k \in \mathbb{N} : a_k a_{k+1} < 0$.

10.5 Satz: Leibnizkriterium

Eine alternierende Reihe, für die die Beträge $|a_k|$ monoton fallende Nullfolge bilden, ist konvergent.

Beweis

o.B.d.A.: $a_0 = s_0 \Rightarrow |a_n| = a_k(-1)^k \Rightarrow a_{2k} > 0 \ \wedge \ a_{2k+1} < 0$

$$s_{2k+2} = s_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} - |a_{2k+1}| + |a_{2k+2}| \leq s_{2k} \leq s_{2k-2} \leq \ldots \leq s_0 \tag{III.39}$$

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} = s_{2k-1} + |a_{2k}| - |a_{2k+1}| \geq s_{2k-1} \geq s_{2k-3} \ldots \geq s_1 \tag{III.40}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} s_{2k+2} = s_{2k+1} + a_{2k+1} \geq s_{2k+1} \geq s_1 \\ s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_0 \end{array} \tag{III.41}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} s_{2k} \text{ fallende, durch } s_1 \text{ nach unten beschr. Folge} \\ s_{2k+1} \text{ steigende, durch } s_0 \text{ nach oben beschr. Folge} \end{array} \tag{III.42}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1}$ existieren und $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} - \lim\limits_{k\to\infty} s_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} s_k \in [s_1, s_0]$ existiert.

Beispiel

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0.6931 \cdots = \ln(2)$
Warnung: Leibniz-Kriterium nicht unabhängig von Umsortieren der Reihenglieder.

10.6 Definition: absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ der Beträge konvergent ist.

10.7 Satz:Verhältnis absoluter und normaler Konvergenz

Gewöhnliche Konvergenz $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$ folgt aus absoluter Konvergenz. Letzteres ist äquivalent zur Existenz einer Schranke c, so dass: $c \geq \sum_{k\in\mathbb{J}} |a_k|$ für beliebiges endliches $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}$.

10.8 Korollar: Umsortierung absolut konvergenter Reihen

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{h(k)}$ absolut konvergent für eine beliebige Bijektion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: Absolut konvergente Reihen können beliebig umsortiert werden.

Beweis zum Satz

Cauchy-Kriterium für $\sum |a_k|$ impliziert Cauchy-Kriterium für $\sum a_k$, da für beliebiges m,m':

$$|\sum_{k=m+1}^{m'} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{m'} |a_k| \tag{III.43}$$

nach Dreiecksungleichung. Dass heißt absolute Konvergenz, daraus folgt gewöhnliche Konvergenz. Für $\mathbb{J} = \{1, 2, \cdots, n\}$ impliziert letzte Aussage, dass $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k\in\mathbb{J}} |a_k| \leq c$. Die monoton steigenden Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ haben also obere Schranke und damit einen Grenzwert. Umgekehrt hat jedes endliche $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}$ ein maximales Element m, so dass:

$$\sum_{k\in\mathbb{J}} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| \leq n \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty\square \tag{III.44}$$

Bemerkung

Die meisten Konvergenzkriterien stellen die stärkere Eigenschaft der absoluten Konvergenz sicher.

10.9 Satz: Konvergenzkriterien

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ muss absolut konvergieren und hat somit Grenzwert, falls sie eines der folgenden Kriteriun erfüllt:

i) Majorantenkriterium: $|a_k| \leq b_k \; \forall \; k$ mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$

ii) Qoutientenkriterium: $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$

iii) Wurzelkirterium: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

Beweis

i) Partialsummen $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$ sind beschränkt und monoton wachsend, daraus folgt absolute Konvergenz.

ii) Für $\epsilon = \frac{1}{2}(1-q) \; \exists \; n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} < q + \epsilon = \frac{1}{2}(q+1) < 1 \; \forall \; m \geq n(\epsilon)$
. Also gilt ab $m = n(\epsilon)$:
$|a_m| = \frac{|a_m|}{|a_{m-1}|}|a_{m-1}| \leq \frac{1}{2}(1+q)|a_{m-1}| \leq \left(\frac{1}{2}(1+q)\right)^{m-n(\epsilon)} |a_{n(\epsilon)}|$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=n(\epsilon)}^{\infty} |a_k| \leq |a_{n(\epsilon)}| \sum\limits_{k=n(\epsilon)}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1+q)\right)^{k-n(\epsilon)} = |a_{n(\epsilon)}| \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+q)} = \frac{|a_{n(\epsilon)}|}{\frac{1}{2}(1-q)} < \infty$

iii) $r := \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
Für $\epsilon = \frac{1}{2}(1-r) > 0$ existiert $n_\epsilon \in \mathbb{N}$:
$(|a_k|)^{\frac{1}{k}} \leq \tilde{r} = r + \epsilon = \frac{1}{2}(r+1) < 1$ für alle $k \geq n_\epsilon \Rightarrow |a_k| \leq \tilde{r}^k \Rightarrow \sum\limits_{k=n_\epsilon}^{\infty} |a_k| \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \tilde{r}^{n_\epsilon} = \frac{\tilde{r}^n}{1-\tilde{r}} \underbrace{\lim_{k\to\infty} (1-r^k)}_{=1} < \infty$

11 b-adische Zahlendarstellung und Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

- $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ sei als Basis der Zahldarstellung fixiert
- Ziffernsymbole 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,...
- Symbol und Wert gleichgestzt, A=10

11.1 Definition: b-adische Zahldarstellung

mit $z_{-m}, z_{-m+1} \dots z_0, z_1, z_2, \dots$ werde die Reihe $\sum\limits_{j-m}^{\infty} z_j b^{-j}$ bezeichnet, $z_j \in \{0, 1, \dots b-1\}$ bzw. das entsprechende Symbol.

Bemerkung

- üblicherweise $z_m \pm 0$
- endliche bzw. abbrechende Darstellung, falls $z_j = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}, z_m \dots z_0, z_1 \dots z_n$
- Darstellungen mit $z_j = b-1$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$ werden ausgeschlossen.

11.2 Lemma: Konvergenz der Darstellung

Die Reihe $\sum\limits_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-j}$ konvergiert

Beweis

$0 \leq z_j \leq b-1$ für alle $j = -m, \dots, 0, 1, \dots,$ dass heißt die geometrische Reihe $\sum\limits_{j=-m}^{\infty} (b-1)b^{-j}$ ist eine konvergente Majorante

Bemerkung

$0,(b-1)(b-1)\overline{(b-1)} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (b-1)b^{-j} = (b-1)\frac{b^{-1}}{1-b^{-1}} = 1,00\overline{0}$
sind zwei Darstellungen der selber Zahl 1.

11.3 Satz: Eindeutigkeit der Darstellung

Jedes $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum\limits_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-j}, \ z_j \in \{0, 1, \dots, b-1\}, z_{-m} \neq 0, z_j \neq b-1$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$.

Beweis

$(b^k)_{k \in \mathbb{N}}$ wächst über alle Grenzen$\Rightarrow \ \exists \, k \in \mathbb{N} : x < b^k$
$\Rightarrow$ es gibt ein minimales $k = m+1$ mit $b^m \leq x < b^{m+1} \Rightarrow 1 \leq b^{-m}x < b$

Setze: $z_{-m} = \lfloor b^{-m}x \rfloor \in \{1, \dots, b-1\} \Rightarrow b^{-m}x - z_{-m} \in [0,1) \Rightarrow 0 \leq x - z_{-m}b^m < b^m$
Seien $z_{-m}, \dots, z_k$ bestimmt mit $0 \leq x_n := x - \sum_{j=-m}^{k} z_j b^{-k} \Rightarrow 0 \leq b^{k+1}x_k < b$

Setze: $z_{k+1} = \lfloor b^{k+1}x_k \rfloor \in \{0, 1, \dots, b-1\}$
$\Rightarrow x_k b^{k+1} - z_{k+1} \in [0,1)$
$\Rightarrow 0 \leq x_{k+1} = x_k - z_{k+1}b^{-(k+1)} \leq b^{-k-1}$
$\Rightarrow$ Vorraussetzung für den nächsten Rekursionsschritt ist erfüllt.

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 \Rightarrow x = \sum\limits_{j=-m}^{\infty} z_j b^{-1} \Rightarrow$ Existenz der Darstellung

Zur Eindeutigkeit:

Sei $y_{-m}\dots y_0, y_1 y_2\dots$ eine weitere Darstellung von x (wobei führende Nullen für gleiche Länge vor dem Komma zulässig seien). Sei k der kleinste Index mit $z_k \neq y_k$. O.B.d.A.: sei $k = m = 0$ und $z_0 > y_0$

$0 = x - x = \sum\limits_{j=0}^{\infty}(y_j - z_j)b^{-j} \leq -1 + \sum\limits_{j=1}^{\infty}(b-1)b^{-j} = -1 + 1 = 0$

Gleichheit muss gelten, gilt aber nur wenn: $z_0 = y_0 + 1\ (b-1)$ und $y_j - z_j = b - 1$, dass heißt $y_j = b - 1 + z_j = 0\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, dass heißt: Die y-Darstellung ist unzulässig und kann sich auch nicht aus der Konstruktion ergeben.

11.4 Satz: Periodizität der Darstellung

Die Ziffernfolge wird genau dann periodisch, wenn $x \in \mathbb{Q}$

Bemerkung/Definition

wird periodisch $\Leftrightarrow\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\ \forall\ n > n_0 : z_{n+p} = z_n \Rightarrow z_{n+kp} = z_n$ für $n > n_0, k \in \mathbb{N}$

Beweis

$\Rightarrow$)

$z_{-m}\dots z_0, z_1 z_2\dots$ werde periodisch.

$x = \sum\limits_{j=-m}^{n_0} z_j b^{-j} + \sum\limits_{j=1}^{p} z_{n_0+j} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b^{-(n_0+j+kp)} = \sum\limits_{j=-m}^{n_0} z_j b^{-j} + \sum\limits_{j=1}^{p} z_{n_0+j} b^{-j} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b^{-n_0-kp}$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} b^{-n_0-kp} = b^{-n_0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (b^{-p})^k = \frac{1}{1-b^{-p}}$

$x = \sum\limits_{j=-m}^{n_0} z_j b^{-j} + \sum\limits_{j=1}^{p} z_{n_0+j} b^{-j} \frac{1}{1-b^{-p}} \in \mathbb{Q}$

Beispiel: $x = (0,31\overline{57})_{10} = \frac{1}{100}(31 + \frac{57}{99}) \in \mathbb{Q}$

$\Leftarrow$) Sei nun $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{m}{n}, x \geq 0$

Wir suchen Periode p. Betrachte Reste von b^k unter Division durch n. Unendlich viele Reste, endlich viele Werte. Seien $k, k+p$ die kleinsten Exponenten zu Potenzen mit gleichen Rest. $\Rightarrow n | b^k(b^p - 1)$, dass heißt $\exists\ l \in \mathbb{N}$ mit $l \cdot n = b^k(b^p - 1) \Rightarrow x = \frac{ml}{nl} = \frac{ml}{b^k(b^p-1)}$

Division von ml durch $(b^p - 1)$ ergibt $u, v \in \mathbb{N}_0$ mit $x = \frac{u}{b^k} + \frac{1}{b^k} \cdot \frac{v}{b^p-1}$

Erzeuge die Darstellungen:

$$x = z_{-m}\dots z_0, z_1 \dots z_k \overline{z_{k+1}\dots z_{k+p}} \begin{cases} z_{-m}\dots z_o, z_1\dots z_k = \frac{u}{b^k} \\ 0, z_{k+1}\dots z_{k+p} = \frac{v}{b^p} \end{cases}$$

Beispiel

1.) $\frac{13}{5}$ zur Basis $b = 7$.

k	0	1	2	3	4
7^k	1	7	49		
$7^k mod 5$	1	2	4	3	1

$5l = (7^4 - 1)_{10} = (48)_{10} \cdot (50)_{10} = (66)_7 \cdot 5 \cdot (13)_7$, $l = (13)_7 \cdot (66)_7$

$(66)_7 \cdot (13)_7 = (1144)_7, (1144)_7 \cdot 3 = (3465)_7 < (6666)_7 = (10)_7^4 - 1$

$\frac{13}{5} = 2,3465\overline{3465}$

2.) $\frac{5}{6}$ in Basis 10 Ergebnis: $\frac{5}{6} = 0,83\overline{3}$

11.5 Lemma: Diagonalargument

M sei Menge mit mindestens 2 Elementen. Dann ist $M^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in M \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ überabzählbar.
Annahme: $M^{\mathbb{N}}$ ist abzählbar.
$M^{\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei $x_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in M.
$m_0, m_1 \in M, m_0 \neq m_1$
wir definieren dann:
$z = (z_k)$ mit $z_k = \begin{cases} m_0 \, wenn \, x_{n,k} \neq m_0 \\ m_1 \, wenn \, x_{n,k} = m_0 \end{cases} \Rightarrow z \neq x_n$ für alle n.
Widerspruch zur Annahme. Dann ist M überabzählbar.

11.6 Satz: Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Beweis

$\mathbb{R}$ enthält die überabzählbare Teilmenge $\{\sum\limits_{j=0}^{\infty} z_j 10^{-j}; z_j \in \{0, 1 \ldots 8\}\} \simeq \{0, 1, \ldots, 8\}^{\mathbb{N}}$

12 Anwendung Wurzelkriterium, Potenzreihen

12.1 Lemma: Eigenschaften der Wurzelfunktion

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ falls $a > 0$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1$ falls $P(n) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j n^j \neq 0$.

Beweis

i) $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ und erfüllt

$$\begin{aligned}
(\sqrt[n]{n})^n = n = (1 + x_n)^n &= \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} x_n^j > \tbinom{n}{2} x_n^2 \\
&= \frac{1}{2} n(n-1) x_n^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq x_n < \sqrt{\frac{2n}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{2}{(n-1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ii) Fallunterscheidung von a:

Fall 1: $a > 1$:

$$\Rightarrow x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0 \Rightarrow a = (x_n + 1)^n \geq n x_n$$
$$\Rightarrow 0 \leq x_n \leq \frac{a}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim x_n = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$$

Fall 2: $a < 1 : \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right) > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \overset{\text{Fall 1}}{=} \frac{1}{1} = 1$

iii) Da o.B.d.A $c_m \neq 0$ (sonst ersetze m durch m-1):

$$P(n) = c_m n^m (\underbrace{\sum_{j=0}^{m} \frac{c_j}{c_m} n^{j-m}}_{\to 1})$$

$$= c_m n^m \underbrace{(1 + \frac{c_{m-1}}{c_m}\frac{1}{n} + \frac{c_{m-2}}{c_m}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{c_0}{c_m n^m})}_{\to 1 \text{ für } n \to \infty}$$

auch gilt für $n \geq n_0$:

$$1 = \lim_{n\to\infty} [\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2}|c_m|}_{\to 1}} \underbrace{(\sqrt[n]{n})^m}_{\to 1}] \leq \lim_{n\to\infty} |P(n)|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} [\underbrace{\sqrt[n]{2|c_m|}}_{\to 1} \underbrace{(\sqrt[n]{n})^m}_{\to 1}] = 1$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} |P(n)|^{\frac{1}{n}} \text{ nach Quetschlemma}$$

12.2 Korollar: Beziehung Reihen und Polynome

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ erüllt genau dann das Wurzelkriterium, wenn dies für $\sum_{k=o}^{\infty} a_k P(k)/Q(k)$ mit beliebigen Polynomen P(k) und Q(k) gilt.

Beweis

$\tilde{a_k} = a_k(P(k)/Q(k))$ erfüllt $\tilde{a_k} Q(k) = a_k P(k) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sup |\tilde{a_k}|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{\frac{1}{k}}$, da $\frac{\sqrt[k]{Q(k)}}{\sqrt[k]{P(k)}} \to 1$.

Interpretation: Potenzen des Index n oder k spielen für Konvergenz nach Wurzelkriterium keine Rolle.
Warnung: In vielen interessanten Fällen gilt: $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, so dass weder Konvergenz noch Divergenz aus Wurzelkriterium folgt.
Beispiel: $a_n = \frac{1}{n^p} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, aber für p=1 ergibt sich Divergenz und für $p > 1$ ergibt sich Konvergenz wie mit anderen Mitteln bewiesen wurde.

12.3 Satz: Vergleich von Qoutienten- und Wurzelkriterium

i) $r \leq q$ und r=q falls $q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

ii) $r > 1$ impliziert Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Beweis

Beachte geschachtelte Grenzprozesse:

i) Nach Definition von q existiert für alle ϵ ein n_0, so dass: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q + \epsilon$ für $n \geq n_0$:

$$\Rightarrow |a_n| < |a_{n_0}|(q+\epsilon)^{n-n_0}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{|a_{n_0}|}(q+\epsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} = \sqrt[n]{|a_{n_0}|}(q+\epsilon)^{\frac{1-n_0}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot (q+\epsilon)$$

$$\to r = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \leq q + \epsilon$$

Letzte Ungleichung gilt für beliebiges ϵ, so dass notwendigerweise $r \leq q$.

Falls $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ gilt für $\epsilon > 0$ und entsprechendes n_0:

$$\begin{aligned} &|a_n| = |a_{n-1}|\tfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \geq |a_{n-1}|(q-\epsilon) \geq \ldots \geq |a_{n_0}|(q-\epsilon)^{n-n_0} \\ &\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}(q-\epsilon)^{\frac{1-n_0}{n}} = (q-\epsilon) \\ &\Rightarrow q \leq r \end{aligned}$$

$\Rightarrow q = r$, da $r \leq q$ bereits bewiesen.

ii) Falls $r > 1$ gilt für beliebig große $n \in \mathbb{N}$, dass $\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow |a_n| > 1$ unendlich oft $\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\Rightarrow$ Divergenz.

Beispiel

Für $r < 1 < q$, das heißt Quotientenkriterium gilt nicht aber Wurzelkriterium sichert Konvergenz (absolute).

$$\begin{aligned} a_n = (\tfrac{1}{2})^{n+(-1)^n} &\Rightarrow \tfrac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} = \tfrac{1\cdot 2^{2k+1}}{2^{2k+1-1}} = 2^1 = 2 \\ \Rightarrow q = \lim_{n\to\infty}\sup \tfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &\geq 2 \end{aligned}$$

$\sqrt[n]{|a_n|} = (\frac{1}{2})^{\frac{n-(-1)^n}{n}} = (\frac{1}{2})^{1+\frac{(-1)^n}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{2}{8}} \leftarrow$ durchschnittliche Reduktion.

Schlussfolgerung: Wurzelkriterium ist genauer als Qoutientenkriterium, da r die durchschnittliche Reduktion der Gliederbeträge $|a_n|$ misst. Demgegenüber verlangt $q < 1$ eine Reduktion in jedem Schritt, das heißt von Glied zu Glied. Hauptanwendung: Potenzreihen.

12.4 Definition: Potenzreihe

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge von Koeffizienten und $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Variable heißt:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ oder } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_n)^n \text{ für festes } x_0 \in \mathbb{R}$$

eine Potenzreihe (am Punkt x_0). $P(x)$ reduziert zu Polynom $\Leftrightarrow a_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

12.5 Satz: Konvergenzradius von reellen Potenzreihen

Falls $r = \lim\limits_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, dann konvergiert die Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut für alle $x \in (-\delta, \delta)$, wobei der Konvergenzradius δ gegeben ist durch $\delta = \begin{cases} \frac{1}{r} & falls\ r > 0 \\ \infty & falls\ r = 0 \end{cases}$.
In letzteren Fall konvergiert P(x) absolut für beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

Anwendung auf Wurzelkriterium auf $P(x)$ ergibt Bedingung:

$$\begin{aligned} 1 > \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sup |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = |x|r \\ \Leftarrow \text{ erfüllt falls } r = 0 \text{ und } |x| \in \mathbb{R}, \text{ oder } r > 0 \text{ und } |x| < \tfrac{1}{r} = \delta. \ \square \end{aligned}$$

Beispiele für Potenzreihen

$P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $P(0) = a_0 0^0 = a_0$, $P(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

i) $a_k = 1$ für $k \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k \Rightarrow q = r = 1$
$\Rightarrow$ *Konvergenzradius* $\delta = \frac{1}{1} = 1$

- $|x| < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz gegen $\frac{1}{1-x}$
- $x = 1 \Rightarrow$ Bestimmte Divergenz gegen ∞
- $x = -1 \Rightarrow$ unbestimmte Divergenz, da $a_k = (-1)^k$ nicht Nullfolge
- $x > 1 \Rightarrow$ Bestimmte Divergenz gegen ∞
- $x < -1 \Rightarrow$ Unbestimmte Divergenz.

Also gilt für $|x| < 1$ absolute Konvergenz, für $|x| > 1$ Divergenz und für $|x| = 1$ Divergenz bestimmt oder unbestimmt.

ii) $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}(-1)^{k-1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$
Positiver Konvergenzradius $\delta = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|\frac{-1^{n-1}}{n}|} = 1$

- $|x| < \delta = 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz gegen $\ln(1+x) \leftarrow$ später zu zeigen.
- $x = 1 \Rightarrow$ alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots = \ln(2)$
- $x = -1 \Rightarrow$ harmonische Reihe $\Rightarrow$ Divergenz gegen $-\infty$
- $x < -1 \Rightarrow$ bestimmte Divergenz gegen $-\infty$
- $x > 1 \Rightarrow$ unbestimmte Divergenz

iii) $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$
Nach Qutientenkriterium :
$q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow r = q = 0 \Rightarrow \delta = \infty$, dass heißt $\forall\, x \in \mathbb{R}$ konvergiert P(x) absolut gegen Wert, den man mit $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ bezeichnet. Wie wir gleich zeigen, gilt die Funtionalgleichung: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
, $\exp(x)\exp(-x) = 1$, $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2})^2$, $\exp(x) > 0$

Algebraische Interpretation: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ Homomorphismus zwischen additiven Gruppe von $\mathbb{R}$ und der multiplikativen Gruppe, neutrales Element ist $\exp(0) = 1$
Bemerkung: Die Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius bilden einen linearen Vektorraum.

12.6 Lemma: Verknüpfung (+) von Potenzreihen

Falls $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ die Konvergenzradien δ_1, δ_2 haben, dann haben die Linearkombination: $R(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x^n$ für beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ einen Konvergenzradius $\delta \geq \frac{1}{2}\min(\delta_1, \delta_2) > 0$

Beweis

$$\begin{aligned} r = \limsup \sqrt[k]{|\alpha a_k + \beta b_k|} &\leq \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|\alpha||a_n|} + \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|\beta||b_n|} \\ &= \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha|}}_{=1} \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\beta|}}_{=1} \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|b_k|} \\ &= \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \text{ , da } \delta_1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}} \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $\sqrt[k]{|a|+|b|} \leq \sqrt[k]{|a|} + \sqrt[k]{|b|}$, da nach bin. Lehrsatz $|a|+|b| \leq (|a|+|b|)^k = |a|+|b|+\sum\limits_{j=1}^{k-1}|a|^j|b|^{k-j}$
$r \leq \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \Rightarrow \delta = \frac{1}{r} \geq \frac{1}{\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}} \geq \frac{1}{2}\min(\delta_1, \delta_2)$ □
Bemerkung: Innerhalb ihres absoluten Konvergenzbereiches können Potenzreihen beliebig genau durch endliche Partialsummen angenähert werden.

12.7 Satz: Restgliedabschätzung

Hat $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den positiven Konvergenzradius $\delta > 0$, dann existiert für jedes $n > 0$ und $\tilde{\delta} < \delta$ ein $c \in \mathbb{R}$, so dass: $|P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| \leq c|x|^n$ für $x \in [-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}] \subset (-\delta, \delta)$

Beweis

$$\begin{aligned} |P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| = |\sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||x|^k = |x|^n \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||x|^{k-n} \\ &\leq |x|^n \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n+k}\tilde{\delta}^k|}_{=c\in\mathbb{R}\text{, da Reihe absolut konvergent}} = |x|^n c \end{aligned}$$

12.8 Korollar: Potenzreihen am Ursprung

Falls $P(x) \neq 0$ positiven Konvergenzradius hat, dann existiert ein $\hat{\delta} \in (0, \tilde{\delta}) \subset (0, \delta)$, so dass:
Fü $z \in (-\hat{\delta}, \hat{\delta})$ gilt $\quad P(z) \neq 0 \vee (z = 0 \wedge a_0 = 0)$

Beweis

Laut Satz 12.7 und der inversen Dreiecksungleichung $|P(x)| \geq |a_{n-1}x^{n-1}|c|x^n|$, wobei a_{n-1} erster nicht verschwindende Koeffizient von P(x) ist:

$$\underbrace{|P(x)|}_{\neq 0} \geq |x|^{n-1}||a_{n-1}| - c|x||, \text{ falls } |x| \neq 0 \wedge |x| < \hat{\delta} = \min(\tilde{\delta}, \frac{|a_{n-1}|}{2c})$$

12.9 Satz: Identitätssatz von Potenzreihen

Falls $P(x) = \sum a_k x^k$ und $Q(x) = \sum b_k x^k$ positiven Konvergenzradius haben und an einer Nullfolge $x_n \to 0$ mit $0 \neq x_n$ übereinstimmen, dass heißt $P(x_n) = Q(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis

Betrachte Differenz $R(x) = Q(x) - P(x) = (-1)P(x) + 1 \cdot Q(x)$. Diese Potenzreihe hat nach Satz 11.5 positiven Konvergenzradius und erfüllt $R(x_n) = Q(x_n) - P(x_n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hätte $R(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(b_k - a_k)x^k$ nicht verschwindende Koeffizienten $(b_k - a_k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann könnte es nach Korollar 12.8 nicht auf der Nullfolge $0 \neq x_n \to 0$ verschwinden. Also muss gelten: $R(x) = 0$ mit $a_k = b_k$ für $n \in \mathbb{N}$.
Interpretation: Durch Potenzreihen um Ursprung $x = 0$ entwickelbare Funktionen sind durch abzählbare Folge $x_n \to 0$ eindeutig definiert (Vergleiche: Polynominterpolation).

12.10 Definition: Cauchy-Produkt

Für zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ bezeichnet man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, mit $c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \in \mathbb{R}$ als das Cauchy-Produkt der beiden Reihen.

Frage: Unter welchen Bedingungen gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$?

Beispiel $a_k = \frac{x^k}{k!}, b_n = \frac{y^n}{n!}$ für $x, y \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \exp(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \exp(y)$:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} = \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y) \text{ definitionsgemäss.}
\end{aligned}
$$

Vermutung: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

12.11 Satz: Konvergenz des Cauchy-Produktes

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren und mindestens eine der beiden Reihen absolut konvergiert, dann konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt, so dass $(\sum_{n=0}^{\infty} c_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ (Insbesondere gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, da beide Faktoren absolut konvergieren.)

Beweis

Später!

Kapitel IV

Stetigkeit und Konvergenz

13 Stetigkeit reeller Funktionen

Motivation: Nullstellensuche
Sei $a < b, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$, sonst beliebig. Suche $x^* \in]a, b[$ mit $f(x^*) = 0$.
Betrachte: $M = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$ mit: $M \neq \emptyset$, weil $a \in M$
M ist durch b nach oben beschränkt $\Rightarrow$ Supremum existiert in $\mathbb{R}$: $x^* := \sup M \in [a, b]$
(analog gibt es $x_* = \inf\{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\}$)
Nach Konstruktion und Definition des Supremums:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \underline{x}, \overline{x} \in [a, b] : x^* - \epsilon < \underline{x} \leq x^* \leq \overline{x} \text{ und } f(\underline{x}) < 0 < f(\overline{x})$$

x^* ist Kanditat für eine Nullstelle. Aber gilt auch $f(x^*) = 0$?

Beispiel

i) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & \text{, falls } x < 0 \\ 5 & \text{, falls } x = 0 \\ 2x & \text{, falls } x > 0 \end{cases}$
$x^* = x_* = 0$, aber $f(0) = 5$.

ii) $f(x) = 2x - 1,\ x_* = x^* = \frac{1}{2},\ f(\frac{1}{2}) = 0$

iii) $f(x) = 4x^3 - x,\ x_* = -\frac{1}{2},\ x^* = \frac{1}{2},\ f(-\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{1}{2})$

Forderung: Funktionswert in x sollte nicht zu stark von Funktionswerten nahe x abweichen.

13.1 Definition: Stetigkeit

$D \subset \mathbb{R}, x \in D, f : D \to \mathbb{R}$, f ist stetig in x genau dann wenn:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ so dass } \underbrace{\forall\, y \in D \text{ mit } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon}_{f(D \cap (x-\delta, x+\delta)) \subset (f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon)}$$

f ist stetig (auf D), falls f an jedem $x \in D$ stetig ist.

Bemerkung: Schreibweise
f stetig in x $\Leftrightarrow \lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$, genauer $\lim\limits_{y \to x, y \in D} f(y) = f(x)$, ,,einseitige Grenzwerte":

$$\lim_{y \to x, y > x} f(y) = \lim_{y \searrow x} f(y) = \lim_{y \to x^+} f(y), \text{ analog } \lim_{y \to x, y < x} f(y) = \lim_{y \nearrow x} f(y) = \lim_{y \to x^-} f(y)$$

13.2 Definition: Lipschitz-Stetigkeit

$D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, x \in D$, f heißt in x lokal lipschitz-stetig, falls es $r > 0, L > 0$ gibt, so dass :

$$\forall\, y, z \in (x - r, x + r)\text{gilt: } |f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$$

13.3 Lemma: Zusammenhang Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ lokal lipschtiz-stetig in $x \in D$, dann ist f in x stetig.

Beweis

$r > 0, L > 0$ nach Definition 13.2 Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze $\delta = \min(r, \frac{\epsilon}{L})$. Dann folgt aus $y \in D, |y - x| < \delta \leq r \Rightarrow y \in (x - r, x + r) \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq L|y - x| < L \cdot \delta \leq L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$ □

13.4 Lemma: Lipschitz-Stetigkeit der Potenzfunktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ist die n-te Potenzfunktion $f(x) = x^n$ in jedem $x \in \mathbb{R}$ lokal lipschtiz-stetig.

Beweis

Fixiere $x \in \mathbb{R}$. Setze $r = 1$. Seien $y, z \in (x - 1, x + 1)$ beliebig.

$$\Rightarrow f(y) - f(z) = y^n - z^n = (y - z)(y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots + yz^{n-2} + z^{n-1})$$
$$\Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq |y - z| \cdot \sum_{k=0}^{n} |y|^k |z|^{n-1-k}$$

Wegen $|y| < |x| + 1, |z| < |x| + 1$ ist $|f(y) - f(z)| \leq |y - z| \cdot \underbrace{n \cdot (|x| + 1)^{n-1}}_{=L}$

Dass heißt mit $r = 1, L = n(|x| + 1)^{n-1}$ gilt $|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$ für alle $y, z \in (x - 1, x + 1)$ □

13.5 Folgerung: Lipschitz-Stetigkeit der Potenzfunktionen

Jede Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ ist in jedem $x \in \mathbb{R}$ lokal lipschitz-stetig.

Beweis

$x \in \mathbb{R}, r = 1, y, z \in (x - 1, x + 1)$:

$$|f(y) - f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||y^k - z^k| \leq \underbrace{(\sum_{k=1}^{n} |a_k| k(|x| + 1)^{k-1})}_{=L} |y - z|$$

13.6 Satz: Nullstellensatz

Seien $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann gibt es ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$.

Beweis

o.B.d.A.: $f(a) < 0 < f(b)$. Setze $x^* = \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und $\underline{x}, \overline{x} \in [a, b]$ mit

$$\text{Supremumseigenschaft} \begin{cases} x^* - \delta < \underline{x} \leq x^* \leq \overline{x} < x^* + \delta \\ f(\underline{x}) \overset{1.)}{\leq} 0 \overset{2.)}{\leq} f(\overline{x}) \end{cases}$$

$$\text{Stetigkeit} \begin{cases} |f(x^*) - f(\underline{x})| < \epsilon & 3.) \\ |f(x^*) - f(\overline{x})| < \epsilon & 4.) \end{cases}$$

$3.) + 1.) : f(x^*) < f(\underline{x}) + \epsilon \leq \epsilon$
$4.) + 2.) : f(x^*) > f(\overline{x}) - \epsilon \geq -\epsilon$
Für beliebige $\epsilon > 0$ gilt also $|f(x^*)| < \epsilon \Rightarrow f(x^*) = 0$ $\square$

13.7 Folgerung: Nullstelle eines Polynoms ungeraden Grades

Sei f ein Polynom ungeraden Grades n, spezieller: $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ mit $a_i \in [-1, 1]$. Dann hat f eine Nullstelle in $[-2, 2]$.

Beweis

Zu zeigen ist: $f(-2) < 0 < f(2)$
$f(-2) = -2^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(-2)^k \leq -2^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k = -2^n + (2^n - 1) = -1$
$-f(2) = -2^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-a_k)2^k \leq -2^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k = -2^n + (2^n - 1) = -1$
Zusammen gilt also: $f(-2) \leq -1 < 0 < 1 \leq f(2)\square$

Bemerkung: $x = Ry$
$g(y) = \frac{1}{R^n} f(Ry) = y^n + \frac{a_{n-1}}{R} y^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{R^{n-1}} y + \frac{a_0}{R^n}$
Es soll $|\frac{a_k}{R^{n-k}}| \leq 1$ gelten, dass heißt $R \geq \sqrt[n-k]{|a_k|}$.
Insgesamt: $R = \max\limits_{k=1,\dots,n} \sqrt[k]{|a_{n-k}|}$.
n ungerade $\Rightarrow g(y)$ hat Nullstellen in $[-2, 2], \Rightarrow f(x)$ hat Nullstellen in $[-2R, 2R]$.

13.8 Folgerung: Wurzelfunktionen

Es gibt die Wurzelfunktionen. Dass heißt: $\forall\, n \in \mathbb{N}, a \geq 0$ ist die Gleichung $x^n - a = 0, x \geq 0$ eindeutig in $\mathbb{R}_+$ lösbar.

Beweis

$f(x) = x^n - a \Rightarrow f(0) = -a \leq 0$.
Mit der Bernoulli-Ungleichung gilt:

$$f(1 + \tfrac{a}{n}) = (1 + \tfrac{a}{n})^n - a \geq 1 + n\tfrac{a}{n} - a = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Nullstelle $x^* \in [0, 1 + \frac{a}{n}]$.
Eindeutigkeit folgt aus der Monotonie der Potenzfunktion. Seien $0 \leq y < x^* < z \Rightarrow 0 \leq y^n < (x^*)^n < z^n \Rightarrow -a \leq f(y) < f(x^*) = 0 < f(z)$ Wenn $y \neq x^*$, dann $f(y) \neq 0$.

13.9 Definition: Schreibweise der Wurzelfunktion

Die einzige Lösung $x^* \geq 0$ von $x^n - a = 0$ wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

13.10 Lemma: Stetigkeit der Wurzelfunktionen

Die Wurzelfunktionen sind stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt[n]{x}$ stetig.

Beweis

1.Fall:
$x > 0$. Zeige: f ist lokal lipschitz-stetig in x. Setze $r = \frac{x}{2}$, seien $y, z \in (\frac{x}{2}, \frac{3x}{2})$ beliebig.

Sei $a := \sqrt[n]{y}, b := \sqrt[n]{z}$, dann ist $y - z = a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
Es gilt $a, b > \sqrt[n]{\frac{x}{2}}$ dann : $\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} > n\sqrt[n]{\frac{x}{2}}^{n-1} = n(\frac{x}{2})^{1-\frac{1}{n}}$
$\Rightarrow |f(y) - f(z)| = |a-b| < \frac{|y-z|}{n(\frac{x}{2})^{1-\frac{1}{n}}}$
Dass heißt: $L = \frac{1}{n}(\frac{2}{x})^{1-\frac{1}{n}}$ ist die Lipschitz-Konstante.
Fall 2: $x = 0$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Setze: $\delta = \epsilon^n$. Für alle $y > 0$ mit $|y - z| = y < \delta$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| \leq \sqrt[n]{\delta} = \epsilon$$

13.11 Satz: äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1): f stetig in x_0

2): Für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$

Beweis

i): 1.) $\Rightarrow$ 2.). Sei $\epsilon > 0$ beliebig fixiert.
Nach Definition von Stetigkeit in x_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass $\forall\, x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$
Nach Definition existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon\ \forall\, n \geq n_0$$

ii): 2.) $\Rightarrow$ 1.) Angenommen f ist nicht stetig in x_0, dass heißt $\exists\, \epsilon_0 > 0\ \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

Betrachte $\delta_n := \frac{1}{n}$. Fixiere ϵ_0.
Also existiert $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon \Rightarrow x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$ $\square$

Bezeichnungen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Dann definiert man: $f \pm g$ durch $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)\ \forall\, x \in D, f \cdot g$ durch $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)\ \forall\, x \in D$, $\frac{f}{g}$ durch $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}\ \forall\, x \in d$ mit $g(x) \neq 0$
Bemerkung: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)\ \forall\, x \in D$

13.12 Satz: Verknüpfung stetiger Funktionen

Seien $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D, f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0.
Wenn außerdem $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.

Beweis

Mittels äquivalenter Charakterisierung der Stetigkeit und Grenzwertsätzen für Folgen.
Sei $(x_n) \subseteq D$ beliebig, $x_n \to x_0$. Nach Vorraussetzung gilt dann $f(x_n) \to f(x_0), g(x_n) \to g(x_0)$.
Aus den Grenzwertsätzen folgt:
$(f \pm g) : (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \to f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0)$.
$(f \cdot g)$: analog
$(\frac{f}{g})$: Es ist noch zu zeigen, dass (unter der Vorraussetzung: $g(x) \neq 0$) ab einem Index n_0: $g(x_n) \neq 0$ (Dann analog mittles Grenzwertsätzen)
Angenommen dies gilt nicht, dass heißt $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \exists\, n_k \geq k : g(x_{n_k}) = 0$
$\Rightarrow$ es existieren unendlich viele x_{n_k} aus (x_n) mit $g(x_{n_k}) = 0 \Rightarrow 0$ ist Häufungspunkt der Folge $(g(x_n))$ wegen $g(x_n) \to g(x)$ muss also gelten $g(x_n) = 0$ $\square$

13.13 Satz: Komposition von stetigen Funktionen

Seien $g : D \to \mathbb{R}, f : E \to \mathbb{R}$ mit $\text{im}(g) \subseteq E$ und g stetig in $x_0 \in D$, f stetig in $g(x_0) \in E$ $(E, D \subseteq \mathbb{R})$.
Dann ist $f \circ g$ stetig in x_0.
(Bemerkung: $(f \circ g)(x) := f(g(x)), f \circ g : D \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$)

Beweis

Sei $\epsilon > 0$ beliebig fix. Wegen Stetigkeit von f in $g(x)$ existiert $\gamma > 0$ mit $\forall\, y \in E$:

$$|y - g(x_0)| < \gamma \to |f(y) - f(g(x_0))| < \epsilon$$

Wegen Stetigkeit von g in x_0 existiert $\delta > 0$ mit:

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta \to |g(x) - g(x_0)| < \gamma \\ \underset{g(x)\in E}{\Rightarrow} &\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta \to |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon \;\square \end{aligned}$$

13.14 Satz: Bolzano-Weierstrass

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt (dass heißt beschränkt und abgeschlossen) und sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig auf K.
Dann existiert $x_*, x^* \in K$: $f(x_*) = \min\limits_{x\in K} f(x), f(x^*) = \max\limits_{x\in K} f(x)$

Beweis

Annahme: f unbeschränkt auf K, dass heißt $\{|f(x)| \mid x \in K\}$ ist unbeschränkt.
$\Rightarrow\ \forall\, m \in \mathbb{N}\, \exists\, x_m \in K : f(x_m) \geq m$ also (x_m) eine reelle Folge auf K. Nach Bolzano-Weiertrass (K beschränkt) existiert eine Teilfolge (x_{m_k}) mit $x_{m_k} \to \overline{x}$.
Da K außerdem abgeschlossen ist, gilt $\overline{x} \in K$, wegen Stetigkeit von f auf K (also insbesondere in $\overline{x} \in K$) gilt: $f(x_{m_k}) \to f(\overline{x}) \Rightarrow (f(x_{m_k}))$ ist beschränkt $\Rightarrow (|f(x_{m_k})|)$ ist beschränkt. - Widerspruch zur Wahl der x_m.

Also $\{f(x) \mid x \in K\}$ beschränkt $\Rightarrow\ \exists\, \xi = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$, $\exists\, \eta = \inf\{f(x) \mid x \in K\}$
Aus der Definition von sup und inf folgt:

$$\exists\, (x_n) \subset K : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \xi,\ \exists\, (y_n) \subset K : \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \eta$$

Da K beschränkt ist, existiert Teilfolgen $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ von $(x_n), (y_n)$ mit:

$$x_{n_k} \to x^*, y_{n_k} \to x_* \underset{K \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow} \text{insbesondere } x^*, x_* \in K.$$

Wegen Stetigkeit von f auf ganz K folgt somit $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*), \eta = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_*)$.
Damit gilt: $\xi = \max\limits_{x\in K} f(x), \eta = \min\limits_{x\in K} f(x)$ $\square$

Bemerkungen:

- K kompakt bedeutet, dass K die endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle ist.
- Der Satz gilt nicht für (halb-) offene oder uneigentliche ($\pm\infty$ Randpunkte des Intervalls)

Beispiele:

i): $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $]0,1]$, aber nicht nach oben beschränkt.

ii): $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x$ ist stetig auf $]0,1[$ und beschränkt (durch 0 und 1), nimmt aber kein Minimum oder Maximum an.

13.15 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn gilt:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ so dass} \,\forall\, x, y \in D \text{ gilt:} |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

(Stetigkeit auf D: $\forall\, x \in D\, \exists\, \delta > 0$ so dass $\forall\, y \in D : |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \epsilon$ **)**

Bemerkung:

- Jede auf D gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig auf D.
- Jede lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- Es gibt stetige Funktionen, die nicht gleichmäßig stetig sind, z.B.: $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben ducrh $f(x) = \frac{1}{x}$.

Es gilt aber:

13.16 Satz: von Heine-Borel

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig (auf K). Dann ist f gleichmäßig stetig (auf K).

Beweis

Annahme: f nicht gleichmäßig stetig, dass heißt:

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \text{so dass} \,\forall\, \delta > 0\, \exists\, x_\delta, y_\delta \in K : |x_\delta - y_\delta| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \epsilon$$

Fixiere das entsprechende ϵ. Betrachte: $\delta_n = \frac{1}{n}$. Finde zu jedem δ_n Punkte $x_n, y_n \in K$ mit:

$$|x_n - y_n| < \tfrac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

Da K kompakt ist existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x_0 \in K$.
Außerdem gilt: $|x_0 - y_{n_k}| \leq |x_0 - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \to 0 \Rightarrow y_{n_k} \to x_0$.
Wegen Stetigkeit von f folgt:

$$f(x_k) \to f(x_0), f(y_{n_k}) \to f(x_0) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \overset{da\ |\cdot| st.\ Fkt.}{=} |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

Widerspruch zu $|f(x_{n_l}) - f(y_{n_k}| \geq \epsilon$ □

14 Verallgemeinerung von Stetigkeitsresultaten auf $\mathbb{R}^n$

Mit anderen Worten: Wir betrachten multivariate Funktionen $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$.
Motivierendes Beispiel: Tischerecken

Frage: Ist es möglich einen rechteckigen Tisch (Perfekt gezimmert) auf einem welligen Untergrund so zu platzieren, dass er nicht wackelt.

Modellierung: Tisch mit Diagonallänge 2 und Winkel $\frac{\pi}{2}+\delta$ zwischen Diagonalen. Alle Beine exakt gleichlang und rechtwinklig angebracht.
Betrachte Probleme mit und ohne vereinfachenden Annahmen, dass $\delta = 0$, dass heißt Tisch quadratisch und dass der Durchmesser der kreisrunden Beine $\rho \geq 0$ verschwindet ($\Rightarrow$ Punktkontakt auf Boden).
Bodenhöhe ist: $h(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \underbrace{x = x^{(1)}, y = x^{(2)}}_{x}$.

Position des Tischzentrums sei $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ und ϕ bezeichne den Winkel zwischen Diagonale und Horizontale.
Koordinaten der Beine:

- Bein 1: $[x+\cos(\phi), y+\sin(\phi)]$
- Bein 2: $[x-\cos(\phi), y-\sin(\phi)]$
- Bein 3: $[x+\cos(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta), y+\sin(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta)]$
- Bein 4: $[x-\cos(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta), y-\sin(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta)]$

Mittelwert von 1 und 2:

$$M_1 = \frac{1}{2}[h(x+\cos(\phi), y+\sin(\phi)) + h(x-\cos(\phi), y-\sin(\phi))]$$

Mittelwert von 3 und 4:

$$M_2 = \frac{1}{2}[h(x+\cos(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta), y+\sin(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta)) + h(x-\cos(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta), y-\sin(\phi+\frac{\pi}{2}+\delta))]$$

$M_1 - M_2 = d(x,y,\phi) : \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[-\pi,\pi]}_{=:D} \to \mathbb{R}$

Beobachtung: Tisch steht fest genau dann wenn $d(x,y,\phi) = 0$ für ein $(x,y,\phi) \in D \Rightarrow$ Suche nach Nullstelle einer multivariaten Funktion.
Wenn Beinradius $\rho > 0$ muss (nur) $h(x,y)$ ersetzt werden durch:

$$\tilde{h}(x,y) = \max\{h(\tilde{x},\tilde{y}) : (\tilde{x}-x)^2 + (\tilde{y}-y)^2 \leq \rho^2\} = \{h(\tilde{x},\tilde{y}) : ||\tilde{x}-x, \tilde{y}-y|| \leq \rho\}$$

Wie wir sehen werden, folgt aus Stetigkeit von h die Stetigkeit von $\tilde{h}$.

14.1 Definition: euklidische Norm

Als Verallgemeinerung des Betrages $|x|$ für $x \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ gilt die songenannte euklidische Norm (oder l_2-Norm):

$$||x|| = ||x||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(x^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ für } x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$$

14.2 Lemma: Eigenschaften der euklidischen Norm, Cauchy-Schwarz-Ungleichung

i): $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **Definitheit**

ii): $||yx|| = |y|\,||x||$ für $y \in \mathbb{R}$ **Homogenität**

iii): $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ ($\Rightarrow ||x+y|| \geq |\,||x|| - ||y||\,|$) **Dreiecksungleichung**

Beweis: (mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

i): und ii): trivial, bleibt zu zeigen die Dreiecksungleichung.
Dafür betrachte:
1.$y = 0$trivial.
2.$y \neq 0$:

$$||x+\gamma y||^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^{(i)}+\gamma y^{(i)})^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x^{(i)})^2}_{=||x||^2} + 2\gamma\sum_{i=1}^{n}x^{(i)}y^{(i)} + \gamma^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y^{(i)})^2}_{=||y||^2}$$

$$= \underbrace{(\gamma||y|| + \frac{1}{||y||}\sum_{i=1}^{n}x^{(i)}y^{(i)})^2}_{=0,\ wenn\ \gamma=-\frac{(\sum x^{(i)}y^{(i)})}{||y||^2}} + ||x||^2 - \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}x^{(i)}y^{(i)})^2}{||y||^2} \geq 0,\ da\ ||x+\gamma y|| \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sum x^{(i)}y^{(i)})^2 \leq ||x||^2||y||^2 \Rightarrow |\sum x^{(i)}y^{(i)}| \leq ||x||\,||y||$$

$\Rightarrow$ für $\gamma = 1$, dass $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$

$\Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ $\square$

Berechnung: Die im Beweis hergeleitete Ungleichung $|\sum\limits_{i=1}^{n}x^{(i)}y^{(i)}| \leq ||x||\,||y||$ heißt Cauchy-Schwarz-Ungleichung und spielt zentrale Rolle in Hilberträumen.

14.3 Definition: Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Eine Folge $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}) = (x_k^{(i)})_{i=1,\ldots n} \in \mathbb{R}^n$ heißt konvergent, wenn es ein $x = (x^{(i)}, \ldots, x^{(n)})$ gibt, so dass $||x_k - x|| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow ||x_k - x||^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|x_k^{(i)} - x^{(i)}|^2}_{=||x^{(k)}-x||^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow x_k^{(i)} \xrightarrow{k\to\infty} x^{(i)} \text{ für } i = 1, .., n$$

Man schreibt dann kurz $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Mit anderen Worten: Folge von Tupeln oder Vektoren $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert denau dann wenn jede der n Komponentenfolgen konvergieren.

14.4 Definition: Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}^n$

Eine Untermenge $D \subset \mathbb{R}^n$ wird bezeichnet als:

- abgeschlossen, falls $(x_k) \subset D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x \in \mathbb{R}^n$, dann gehört auch x zu D.
  Mit anderen Worten: Jeder Häufungspunkt einer Folge aus D gehört zu D.
- offen, falls $C_D = \mathbb{R}^n \backslash D = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin D\}$ abgeschlossen ist.
- beschränkt, falls $\sup(||x|| : x \in D) < \infty$
- kompakt, falls beschränkt und abgeschlossen
- konvex, falls für alle $x, y \in D$ und $\alpha \in [0,1]$ auch $\alpha x + (1-\alpha)y \in D$

14.5 Satz: Rechenregeln, Verallgemeinerung von 13.12

i): $f, g \in \mathcal{C}(D), D \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow f \pm g \in \mathcal{C}(D), f \cdot g \in \mathcal{C}(D), \frac{f}{g} \in \mathcal{C}(D)$ falls $|g(x)| \neq 0$ für $x \in D$

ii): $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$(f \circ g) : E \to \mathbb{R} \text{ falls } g(E) \subset D.\ f \in \mathcal{C}(D) \wedge g \in \mathcal{C}(D) \Rightarrow (f \circ g) \in \mathcal{C}(D)$$
$$(g \circ f) : D \to \mathbb{R}^n \text{ falls } f(D) \subset E.\ f \in \mathcal{C}(D) \wedge g \in \mathcal{C}(D) \Rightarrow (g \circ f) \in \mathcal{C}(D)$$

Beweis

Wie im eindimensionalen, skalaren mit Hilfe von Folgencharakterisierung.
Bemerkung: Gilt auch für gleichmäßige Stetigkeit, vorausgesetzt $\inf_{x\in D} |g(x)| > 0$. Mit anderen Worten: Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit vererben sich, wenn man Nullen im Nenner vermeidet.

Beispiel

$F : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g(x) \equiv ||x||$. $F \in \mathcal{C}(D) \Rightarrow ||F(x) - y|| = g(F(x) - y) \in \mathcal{C}(D)$, wobei $y \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor.
Häufig sucht man x so, dass $||F(x) - y||$ null oder minimal wird, ein solches x muss es geben, wenn D kompakt ist.
Ergänzung: $D \equiv (0, \infty)$, $g(x) = x$, $f(x) = 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}, g(x) > 0 \forall x \in D$, aber $\inf_{x\in D}(g(x)) = 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf $x \in (0, \infty)$. Andererseits für $g_\epsilon(x) = \epsilon + x$ hat $\inf\limits_{x\in D} g_\epsilon(x) = \epsilon$ und ergibt die gleichmäßige stetige Funktion $\frac{1}{g_\epsilon(x)} = \frac{1}{x+\epsilon}$

14.6 Satz: Verallgemeinerung von Bolzano-Weierstrass/Heine-Borel, 13.14, 13.16

Falls $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dass heißt abgeschlossen und beschränkt gilt:

i): Alle Folgen $(x_k) \subset D$ haben eine in D konvergente Teilfolge $(x_{ki}) \subset D$, so dass $\lim_{i\to\infty} x_{ki} = x \in D$ (sogenannte Folgenkompaktheit).

ii): Für $f \in \mathcal{C}(D)$ existieren Punkte $x_*, x^* \in D$, so dass:

$$f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in D\} \leq f(x) \leq \sup\{f(x) : x \in D\} = f(x^*)$$

Man schreibt dann $x_* = \arg\min(f(x) : x \in D)$ und $x^* = \arg\max(f(x) : x \in D)$.

Warnung: arg min und arg max sind streng genommen keine Funktionen (sondern Multifunktionen), da x_* und x^* eben im allgemeinen nicht eindeutig sind.

iii): $f \in \mathcal{C}(D) \Leftrightarrow f$ ist gleichmäßig stetig , dass heißt:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : x \in D, y \in D \wedge ||x - y|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Beweis

Nur zu i):, da Rest analog wie im eindimensionalen Fall.
Zu i): Schreibe $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$. Da für jedes $i \leq n$ gilt:

$$|x_k^{(i)}| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_k^{(i)}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sup(||x|| : x \in D) < \infty$$

sind auch die Komponentenfolgen $(x_k^{(i)})_{k=1,\ldots,\infty} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.
Deshalb hat insbesondere $(x_k^{(1)})_k$ eine konvergente Teilfolge $x_{k_j}^{(1)} \xrightarrow{j\to\infty} x_*^{(1)}$. Dann hat wiederum

$(x_{k_j^{(2)}})_{j=1,...}$ eine gegen $x_*^{(2)}$ konvergierende Teilfolge. Dieser Auswahlprozess kann n mal wiederholt werden um eine Teilfolge $(\tilde{x}_k) \subset (x_k) \subset \mathbb{R}^n$ zu erhalten mit:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k = x_* = (x_*^{(i)})_{i=1,...,n} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow ||\tilde{x}_k - x_*||_k \to 0$$

$x_* \in D$, wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit von D.

ii): und iii): folgen „wrtlich“wie in Satz 13.14 und 13.16 □

14.7 Definition: Zusammenhngende Menge

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn es für alle Paare $x, y \in D$ eine Pfadfunktion $p : [0, 1] \to D$, so dass $p \in \mathcal{C}([0, 1])$ und $p(0) = x,\ p(1) = y$.
Beobachtung: Vereinigungen zusammenhängender Mengen sind genau dann zusammenhängend, wenn die Schnitte nicht leer sind.

14.8 Satz: Mittelwertsatz, Verallgemeinerung von 13.6

Falls $f \in \mathcal{C}(D)$ mit D zusammenhängend, existiert für jedes Paar $x, y \in D$ und jedes $c \in [\min(f(x), f(y)), \max(f(x), f(y))]$ ein $z \in D$ mit $f(z) = c$.

Für Anwendung auf Tischbeinproblem betrachte $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ D$ abgeschlossen und für festes $\rho > 0$ die modifizierte Funktion: $\tilde{h}(z) \equiv \max\{h(x) : x \in \mathcal{B}_\delta(z)\}$, mit $\mathcal{B}_\delta(z) = \{x \in D : ||x-z|| \le \delta\}$

Behauptung: $h \in \mathcal{C}(D) \Rightarrow \tilde{h} \in \mathcal{C}(D)$.

Beweis: Betrachte Punkt z und Nachbar z' mit $||z - z'|| \le c\delta,\ 0 < c < 1$
$\mathcal{B}_{2\delta}(z)$ ist abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. Folglich ist h auf $\mathcal{B}_{2\delta}(z)$ nicht nur stetig, sondern gleichmäßig stetig.
Dass heißt zu jedem $\epsilon > 0\, \exists\, \beta > 0\ \forall\, x, y \in \mathcal{B}_{2\delta}(z) : ||x - y|| < \beta \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \epsilon$.

$\tilde{h}(z') = \max\{x \in \mathcal{B}_\delta(z')\} = h(\hat{y})$ für $\hat{y} \in B_\delta(z')$
$\tilde{h}(z) = \max\{x \in \mathcal{B}_\delta(z)\} = h(\hat{x})$ für $\hat{x} \in B_\delta(z)$
$\hat{x}, \hat{y}$ existiren da h stetig auf kompakten $B_\delta(z),\ B_\delta(z')$
Betrachte $||\hat{x} - z'|| = ||\hat{x} - z + z - z'|| \le ||\hat{x} - z|| + ||z - z'||$
$\le \delta + c\delta = (1 + c)\delta$ Betrachte $w := \frac{1}{1+c}(\hat{x} - z') + z' \Rightarrow ||w - z'|| \le \delta$
$\Rightarrow w \in B_\delta(z')$ und es gilt:
$||w - \hat{x}|| \le (1 - \frac{1}{1+c})(1 - c)\delta$ dann zu $\epsilon > 0$ wähle c klein genung so dass $(1 - \frac{1}{1+c})(1 - c)\delta < \beta$ und dann gilt:
$h(\hat{x}) - h(w) \le \epsilon \Rightarrow h(\hat{x}) \le \epsilon + h(w) \le \epsilon + h(\hat{y})$
$\Rightarrow h(\hat{x}) - h(\hat{y}) \le \epsilon \Rightarrow \tilde{h}(z) - \tilde{h}(z') \le \epsilon$

Umgekehrt gilt nach Austausch von z und $\hat{z}'$:

$$\tilde{h}(z) \le \tilde{h}(\hat{z}) + \epsilon \Rightarrow |\tilde{h}(z) - \tilde{h}(\hat{z})| \le \epsilon \text{ für } ||z - \hat{z}|| \le c\delta$$

$\Rightarrow \tilde{h} : D \to \mathbb{R}$ ist stetig wie behauptet.

Folgerung: O.b.d.A.: gilt $\rho = 0$ bei Tischproblem. Quadratischer Fall: Setze Tischzentrum

$$\begin{aligned}(x, y) = (0, 0) : \quad d(\phi) = d(0, 0, \phi) &= \frac{1}{2}[h(\cos\phi, \sin\phi) + h(-\cos\phi, -\sin\phi)] \\ &= \frac{1}{2}[h(\cos\phi + \pi, \sin\phi + \pi) + h(-\cos\phi + \pi, -\sin\phi + \pi)] \\ d(\phi + \frac{\pi}{2}) &= -d(\phi) \Rightarrow d(0) = d(\frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

d ist Zusammensetzung stetiger Funktionen und muss nach Zwischenwertsatz Nullstellen in $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzen, daraus folgt Tisch wackelt nicht.

15 Gleichmäßige Konvergenz

Motivation: Häufig werden Funktionen f für theoretische oder praktische Zwecke durch Folgen „einfacher“Funktionen $f_n(x)$ angenähert.

Beispiel: $exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ mit $f_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$.

Fragen ergeben sich bezüglich dem Konvergenzverhalten und der Vererbung von Eigenschaften der f_n auf die Grenzfunktion $f(x)$, speziell Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

15.1 Definition: punktweise Konvergenz

Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}^m$ heißt punktweise konvergent gegen $f : D \to \mathbb{R}^m$, falls $\forall\, x \in D$ gilt:

$f(x) = \lim f_n(x)$. Man schreibt dann $f = \lim f_n$.

Beispiel: $f_n(x) = (1-|x|)^n : [-1,1] \to [0,1]$. Dann gilt: $f_n(-x) = f_n(x)$, die Funktion ist gerade,

und $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & , falls\ x \neq 0 \\ 1 & , falls\ x = 0 \end{cases}$

Mit anderen Worten: Obwohl alle $f_n(x)$ (sogar gleichmäßig) stetig sind auf $[-1,1]$, hat die Grenzfunktion an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit.

Allgemeine Interpretation: $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(\lim\limits_{x\to 0} f_n(x))}_{=1} \neq \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))}_{=0}$

In Worten: Die beiden Grenzprozesse

- Argument x gegen a schieben
- Funktionsindex n gegen Unendlich laufen lassen

sind hier nicht kommutativ. Das ist ein typischer Effekt, der zum Beispiel auch für Vertauschung von unendlichen Summationen, Differentation und Integration auftritt. Die Analysis sucht stärkere Bedingungen,um die Austauschbarkeit zu gewährleisten.

15.2 Definition: gleichmäßige Konvergenz

Die Folge $f_n : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichnmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergent, falls:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, n(\epsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in D \wedge\ \ \forall\, n \geq n(\epsilon)$$

Bemerkung: Bei punktweiser Konvergenz darf $n = n(\epsilon, x)$ von x abhängen. Obiges Beispiel ist nicht gleichmäßig konvergent, da zum Beispiel für $\epsilon = \frac{1}{2}$, n beliebig (groß) und $x_n = \frac{1}{3n}$ gilt:

$$f_n(x_n) = (1 - \tfrac{1}{3n})^n \geq 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3} > f(x_n) + \tfrac{1}{2} = 0 + \tfrac{1}{2}$$

15.3 Satz: Vererbung von Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz

Falls $(f_n) \subset \mathcal{C}(D,\mathbb{R})$ gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist auch f stetig, dass heißt $f \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R})$.

Beweis

Für festes $x \in D$ und $\epsilon > 0$ finde n so, dass $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{4}\ \forall\, y \in D$. Dieses n existiert wegen der Vorraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz, da f_n laut Voraussetzung stetig, existiert $\delta > 0$ so, dass $|f(\tilde{x}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, falls $||x - \tilde{x}|| < \delta$. Also folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} ||\tilde{x} - x|| < \delta \Rightarrow & |f(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x}) + f_n(\tilde{x}) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ & \leq |f(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x})| + |f_n(\tilde{x}) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ & \leq \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{4} < \epsilon\ \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Die gleichmäßige Konvergenz lässt sich für $f_n \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ mit kompakten $D \subset \mathbb{R}^d$ wie folgt durch Normation darstellen:
Beobachtung: Die Definition 15.2 der gelchmäsigen Konvergez ist äquivalent zu: $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, n(\epsilon)$: $||f_n - f||_\infty < \epsilon$ für alle $n > n(\epsilon)$, wobei für beliebiges $g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ mit D kompakt gilt: $||g||_\infty = \sup_{x\in D} |g(x)| = \max_{x\in D} |g(x)|$. Man kann leicht nachprüfen, dass $|| \cdot ||_\infty$ auf dem linearen Raum $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ die in Lemma 14.2 für die euklidische Norm aufgeführten Eigenschaften hat (Definitheit, Homogenität, Dreiecksungleichung). Dadurch wird $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ zum normierten Raum, in dem man ähnlich argumentieren kann, wie in den euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt folgendes:

15.4 Satz: gleichmäßige Konvergenz von Cauchy-Folgen

Für kompaktes D konvergiert eine Folge $f_n \subset \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ genau dann gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$, wenn sie eine Cauchy-Folge bezüglich $|| \cdot ||_\infty$ in folgendem Sinne ist:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, n_0(\epsilon) : n \geq n(\epsilon) \leq m \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$$

Beweis

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n(\epsilon) \wedge x \in D$. Also gilt für $m \geq n(\frac{\epsilon}{2})$ nach Dreicksungleichung:

$$\begin{aligned} ||f_n - f_m|| &= \max_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \max_{x\in D}(|f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|) \\ &\leq \max_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| + \max_{x\in D} |f_m(x) - f(x)| = ||f_n - f||_\infty + ||f_m - f||_\infty < 2\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow (f_n)$ bilden Cauchy-Folge

„$\Leftarrow$“Übung

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz ist hinreichend, aber nicht notwendig für Stetigkeit der Grenzfunktion, siehe Beispiel:
$f_n(x) = \max(0, \min(x2^n, 2 - x2^n)) : [0, 1] \to [0, 1]$
Die punktweise Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ist sicherlich stetig. Es gilt aber für $n \neq m$, dass $||f_n - f_m||_\infty = 1$, die f_n bilden also sicherlich keine Cauchy-Folge und wir haben keine gleichmäßige Konvergenz. Außerdem hat die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trotz der Beschränkung $||f_n||_\infty$ keine konvergente Teilfolge.
Mit anderen Worten: Heine-Borel, dass heißt die Folgenkompaktheit beschränkter Mengen, gilt nicht on $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ oder anderen unendlich dimensionalen Räumen. $\Rightarrow$ Funktionsanalysis wird angewand, wo Satz 15.4 bedeutet, dass $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ ist vollständig, dass heißt jede Cauchy-Folge konvergiert.

15.5 Definition: Konvergenz von Reihen

Für eine Folge $D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ punktweise oder gleichmäßig konvergent, genau dann wenn, die Folge der Partialsummen $g_n = \sum_{k=0}^n f_k : D \to \mathbb{R}$ punktweise beziehungsweise gleichmäßig konvergent sind.

15.6 Satz: Majorantenkriterium von Weierstrass(glm. Kvg. von Fkt-folgen)

Falls $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist folgt gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=0}^\infty f_n = f$ aus der Bedingung $||f_n||_\infty = \max_{x\in D} |f_n(x)| \leq \phi_n$ mit $\sum_{n=0}^\infty \phi_n < \infty$, dass heißt die Skalarreihe der Schranken ϕ_n muss absolut konvergieren.

Beweis

Wegen der Dreiecksungleichung gilt für die Partialsummen $g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ für $m \geq n$:

$$||g_m - g_n||_\infty = ||\sum_{k=n+1}^{m} f_k||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||f_k||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} \phi_k = \sum_{k=0}^{m} \phi_k - \sum_{k=0}^{n} \phi_k$$

Da $\sum \phi_k$ beschränkt ist, bilden ihre Partialsummen eine Cauchyfolge und dasselbe muss für die g_n gelten. Die Behauptung folgt aus Satz 15.4.

Rückblick: Nach Satz 12.5 ist die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent, wenn $|x| < \rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, wobei $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ gesetzt wird.
Nunmehr ergibt Satz 15.6 für $f_k(x) = a_k x^k$ mit $D = [-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}] \subset (-\rho, \rho)$ $(\Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\rho} < \rho)$, dass :

$$||f_k||_\infty = \max_{|x|\leq\tilde{\rho}} |a_k x^k| = |a_k| \max_{|x|\leq\tilde{\rho}} |x|^k \leq |a_k|\tilde{\rho}^k =: \phi_k$$

$\limsup \sqrt[n]{\phi_k} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \tilde{\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho} < 1$ nach Definition von $\rho > 0$.
Also konvergiert $\sum \phi_k$ nach dem Wurzelkriterium und wir erhalten folgenden Satz:

15.7 Satz: Stetigkeit und glm. Konvergenz innerhalb des Kvg-Radius

Falls $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ hat, so ist die Reihe auf allen Intervallen $[-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}] \subset (-\rho, \rho)$ gleichmäßig konvergent und $f(x)$ ist in ganz $(-\rho, \rho)$ stetig.

Beweis

Gleichmäßige Konvergenz und damit Stetigkeit auf $[-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}]$ folgt aus Weierstrass-Bedingung. Stetigkeit in $(-\rho, \rho)$ folgt, da für alle $x \in (-\rho, \rho)$ gilt: $x \in [-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}]$ für $\tilde{\rho} = \frac{1}{2}(\rho + x)$ $\square$

Beispiel: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ hat $\rho = 1$

16 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Nach Abschnitt 12 hat die Exponentialreihe $exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$ den Konvergenzradius $\rho = \infty$, ist also nach Satz 15.7 für alle $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ wohldefiniert und stetig. Wegen der sich aus dem Wurzelkriterium ergebenden absoluten Konvergenz, führt das Cauchy-Produkt auf die Funktionalgleichung $exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y)$.

16.1 Lemma: elementare Eigenschaften des Exponentials

Elementare Eigenschaften des Exponential:

i): $x > 0 \Rightarrow exp(x) > 1 = exp(0) > exp(-x) > 0$

ii): $x < y \Leftrightarrow exp(x) < exp(y)$ **Monotonie**

iii): $\lim\limits_{x\to 0} \frac{exp(x)-1}{x} = 1$

iv): $\forall\, n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x\to\infty} \frac{exp(x)}{x^n} = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} exp(-x)x^n = 0$

Beweis

i):
- $exp(x) = 1 + x + \ldots > 1 + x$ für $x > 0$
- $exp(0) = 1 + 0 + \ldots = 1$
- $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)} < 1$, da $exp(-x)exp(x) = exp(0) = 1$

ii): $exp(y) = exp(x) \underbrace{exp(y-x)}_{>1 \Leftrightarrow y>x} > exp(x)$

iii):

$$\frac{exp(x)-1}{x} = \frac{(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{exp(x)-1}{x} = \lim_{x \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \lim_{x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = 1$$

iv):
- $exp(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ für $x \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{exp(x)}{x^n} \geq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{x^n(n+1)!} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} exp(-x)x^n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{exp(x)}{x^n}} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\square$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $exp(x + y) = exp(x)exp(y)$ und die Eigenschaft iii): die Funktion $exp(x)$ eindeutig, dass heißt ohne Bezug auf Potenzreihe definiert.

16.2 Definition: Eulerische Zahl

Der spezielle Wert $e = exp(1) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} + \ldots = 2.7182\ldots$ heißt eulersche Zahl und erscheint sehr häufig.

16.3 Satz: Interessante Eigenschaften von $exp(x)$

i): e ist irrational (sogar transzendent)

ii): $exp(m/n) = [exp(1)]^{\frac{m}{n}}$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

iii): $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = exp(1)$

iv): $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = exp(x)$

Letzteres charakterisiert $exp(x)$ als Grenzwert der Funktionenfolge $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$.

Beweis

i): Annahme: $\frac{m}{n} = e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow n!(\tfrac{m}{n}) = m(n-1)! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(n-k)! + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{N} \ni \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{n+1+j} \leq \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1 - \frac{1}{n+2})} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \in (0,1)$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Ganzzahligkeit .

ii): folgt „unmittelbar“aus der Funktionalgleichung.

iii):

$$
\begin{aligned}
exp(1) - (1+\tfrac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{n}\right)^k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}\left(1 - \tfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \underbrace{[1 - \underbrace{(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{(k-1)}{n})}_{\in(0,1)}]}_{\in(0,1)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!}[1 - (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{(k-1)}{n})] + \sum_{k=m}^{\infty} \tfrac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

für festes $m < n$.
Für $n \to \infty$ ergibt sich:

$$0 \leq e - \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!}[1 - (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{(k-1)}{n})] + \sum_{k=m}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

da für festes k

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!}[1 - (1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{(k-1)}{n})] \\
= &\lim_{n\to\infty}[1 - \prod_{j=1}^{k-1}(1-\tfrac{j}{n})] = 1 - \prod_{j=1}^{k-1}(1 - \lim_{n\to\infty}\tfrac{j}{n}) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Schließlich lassen wir auch $m \to \infty$ gehen und erhalten $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} = 0$, da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert.

iv): Selbst! □

16.4 Satz: Umkehrfunktion f^{-1} für monotones, stetiges und abgeschlossenes f

Falls f auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b, a \in \mathbb{R} \ni b$ stetig und streng monoton wachsend, dass heißt $x < y \in [a,b] \Rightarrow f(x) < f(y)$, dann existiert eine inverse Funktion $f^{-1} : E \equiv [f(a), f(b)] \to [a,b]$. Diese ist auch streng monoton wachsend und stetig.

Beweis

Injektivität folgt aus der Monotonie und der Zwischenwertsatz impliziert, dass $f(x) = z$ für alle $z \in [f(a), f(b)]$ eindeutig lösbar ist. Also ist f eine Bijektion von $D \equiv [a,b]$ auf $E = [f(a), f(b)]$. Zu zeigen bleibt die Stetigkeit.
Für $y \in (f(a), f(b))$ existiert $x \in (a,b)$ so, dass $f(x) = y$. Für $0 < \epsilon \equiv \min(x-a, b-x)$ gilt:

$$|\tilde{x} - x| < \epsilon \Leftrightarrow f(x-\epsilon) < f(\tilde{x}) < f(x+\epsilon)$$

Also folgt für $\tilde{y} = f(\tilde{x})$: $|\tilde{y} - y| < \delta \equiv \min(f(x+\epsilon) - f(x), f(x) - f(x-\epsilon))$ dass:

$$|f^{-1}(\tilde{y}) - f^{-1}(y)| = |\tilde{x} - x| < \epsilon$$

Daher kann ϵ beliebig klein gewählt werden, so dass sich Stetigkeit von f^{-1} im Inneren von $E = [f(a), f(b)]$, ergibt.

Gesonderte Betrachtung für $x = a, x = b$ ergibt Stetigkeit auf $[f(a), f(b)]$ $\square$

Verallgemeinerung: Durch Anwendung auf $-f(x)$ lässt sich der Satz unmittelbar auf streng monoton fallende Funktionen erweitern. Es gilt auch auf offenen und halboffenen Intervallen, also $(a, b), [a, b), (a, b]$, sowie für $a = -\infty$ oder $b = \infty$. Im letzten Fall wird gesetzt:

$$f(a) = \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ beziehungsweise } f(b) = \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Verallgemeinerung auf $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ durch IFT (Implizite Funktionen Theorem) (siehe Analysis II).

16.5 Definition: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Die nach Verallgemeinerung von Satz 16.4 existierende Umkehrfunktion von $f(x) = exp(x)$: $(-\infty, \infty) \to (0, \infty)$ heißt der natürliche Logarithmus $\log(x) = \ln(x) : (0, \infty) \to (-\infty, \infty)$.

16.6 Lemma: Eigenschaften des Logarithmus

(Korollar zur 16.1) Für $x > 0 < y$:

i): $\log(1) = 0, \log(e) = 1, \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

ii): $\log(xy) = \log(x) + \log(y), \log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$

iii): $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim\limits_{\tilde{x}\to 0} \frac{\log(1+\tilde{x})}{\tilde{x}} = 1$

iv): $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis

i):
- $exp(0) = 1 \Rightarrow \log(1) = 0$
- $\log(e) = \log(exp(1)) = 1$
- $\frac{1}{x} = \frac{1}{exp(\log(x))} = exp(-\log(x)) \Rightarrow \log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$

ii):
- $z = \log(xy) \Leftrightarrow e^z = xy = e^{\log(x)}e^{\log(y)} = e^{(\log(x)+\log(y))}$
  $\Rightarrow z = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

iii): $x \to 1 \Leftrightarrow y = \log(x) \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{e^y-1} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$ nach $iv)$:

iv): $x \to \infty \Leftrightarrow y = \log(x) \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^{\frac{n}{n}}}{(e^y)^{\frac{1}{n}}} = [\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^n}{exp(y)}]^{\frac{1}{n}} = 0^{\frac{1}{n}} = 0$ $\square$

16.7 Definition: Allgemeine Potenz- und Logarithmusfunktion

Allgemeine Potenz und Logarithmus zur Basis $0 < a \in \mathbb{R}$. $a^x \equiv exp(x \log(a))$ für $0 < x \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Potenz und $\log_a(x) \equiv \frac{\log(x)}{\log(a)}$für $0 < x \in \mathbb{R}$ ist der allgemeine Logarithmus zur Basis a.

16.8 Lemma: Eigenschaften des allgemeinen Logarithmus

Für $0 < a \in \mathbb{R}$ gilt:

i): $\log_a(a^x) = x$ für $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_a(a^x) = id_{\mathbb{R}}, a^{\log_a(x)} = x$ für $0 < x \in \mathbb{R} \Rightarrow a^{\log_a(x)} = id_{\mathbb{R}_+}$ (Identiätsabbildungen auf $\mathbb{R}/\mathbb{R}_+$)

ii): $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a), \lim\limits_{x\to 1} \frac{\log_a(x)}{x-1} = \frac{1}{\log(a)}$

iii): $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Beweis

Partiell als Übung, durch Rckführung auf 16.5 und 16.6.

Zwischenbemerkung: Definition und Eigenschaften von Sinus und Kosinus lassen sich relativ elegant aus den Eigenschaften des Exponentials im Komplexen herleiten. Deswegen machen wir einen kurzen Ausflug ins Komplexe. Im Folgenden, dass heißt für Differentation und Integration, spielen nur $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Rolle.
Beobachtung: Alle Aussagen zur absoluten Konvergenz aus Abschnitt 12 gelten auch für komplexe Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Der Betrag wird jetzt berechnet als $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||_2$
Der Konvergenzradius berechnet sich wie zuvor mit $\rho \equiv \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0,\infty]$.
Im Inneren der Kreisscheibe $\mathcal{B}_\rho \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ konvergiert die Reihe absolut gegen einen stetigen Grenzwert $f(z)$. Außerdem ist $f(z)$ bezüglich Konjugierung homomorph (wie Polynome), dass heißt: $f(\overline{z}) = \overline{f}(z)$ mit $\overline{z} = x - iy$. Aus absoluter Konvergenz folgt Konsistenz des Cauchy-Produktes, dass heißt insbesondere für Exponentialreihe $exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ die Funktionalgleichung: $exp(z_1+z_2) = exp(z_1)exp(z_2)$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
Aufteilung von z in reellen und imaginären Anteil ergibt:

$$\begin{aligned}
exp(x+iy) &= \underbrace{exp(x)}_{\in\mathbb{R}} exp(iy) = exp(x)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(iy)^k}{k!}) \\
\tfrac{exp(x+iy)}{exp(x)} &= 1 + \tfrac{iy}{1} + \tfrac{i^2y^2}{2} + \tfrac{i^3y^3}{6} + \tfrac{i^4y^4}{24} + \tfrac{i^5y^5}{120} + \ldots \\
&= (1 - \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{y^4}{24} - \ldots) + i(y - \tfrac{y^3}{6} + \tfrac{y^5}{120} - \ldots) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-y^2)^k}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-y^2)^k}{(2k+1)!} \equiv cos(y) + isin(y)
\end{aligned}$$

Schlussfolgerung: Eulerische Formel: $exp(x+iy) = exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$

16.9 Lemma: Eigenschaften von Sinus und Kosinus

i):
- $\sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix)) = \frac{1}{2}(exp(ix) - exp(-ix)) = -\sin(.x) \in \mathbb{R}$ ist ungerade.
- $\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix)) = \frac{1}{2}(exp(ix) + exp(-ix)) = \cos(-x) \in \mathbb{R}$ ist gerade.

ii): $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\sin(x) \in [-1,1] \ni \cos(x)$

iii): $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),\ \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

iv): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Beweis

i): folgt aus der Definition.

ii): $(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right))^2 + (\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right))^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix} - e^{2ix} + e^{2ix}e^{-ix} - e{-}2ix) = 1$

iii): $\cos(x+y) + \sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))$

iv): Aus der Reihendarstellung folgt:

$$\lim_{x\to\ 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!} = \lim_{x\to 0}(1 - \frac{x^2}{6} + \ldots) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k)!} = 0 \quad \square$$

16.10 Satz: Weitere Eigenschaften von Kosinus und Sinus

Die Funktion $\cos(x)$ hat auf $(0,2)$ genau eine Nullstelle, die mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird, die eine irrationale und sogar tranzendente Zahl ist (Irrationalität und Tranzendenz später bewiesen). Es gilt:

i): $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos(\pi) = -1$

ii): $\sin(x+\pi) = -\sin(x) = \sin(x-\pi), \cos(x+\pi) = -\cos(x) = \cos(x-\pi)$, dass heißt, die Periode beträgt 2π.

iii): $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\pi} \in \mathbb{Z} \wedge \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} \in \mathbb{Z}$.

Beweis

Hilfsaussagen:

a): $\sin(x) \geq x$ für $0 \leq x \leq 2$

b): $\cos(0) = 1, \cos(x) \leq -\frac{1}{3}, \cos(x)$ ist streng monoton fallend für $0 \leq x \leq 2$

a): und b): implizieren die Existenz eindeutiger Nullstellen in $(0,2)$.

Beweis von a): $\frac{sin(x)}{x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \ldots$

Die Reihe alterniert und für $|x| \leq 2$ sind die Gliederbeträge monoton fallend, da:

$$\frac{(-x^2)^{k-1}(2k-1)!}{(2k+1)!(-x^2)^k} = \frac{x^2}{4k^2-1} < 1$$

Beweis von b): Für $y > x$ gilt nach der trigonometrischen Identität:

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \cos(y) &= \cos(\tfrac{1}{2}(x+y) + \tfrac{1}{2}(x-y)) - \cos(\tfrac{1}{2}(x+y) - \tfrac{1}{2}(x-y)) \\
&= \cos(\tfrac{1}{2}(x+y))\cos(\tfrac{1}{2}(x-y)) - \sin(\tfrac{1}{2}(x+y))\sin(\tfrac{1}{2}(x-y)) \\
&\quad - \cos(\tfrac{1}{2}(x+y))\cos(\tfrac{1}{2}(x-y)) - \sin(\tfrac{1}{2}(x+y))\sin(\tfrac{1}{2}(x-y)) \\
&= -2\sin(\tfrac{1}{2}(x+y))\sin(\tfrac{1}{2}(x-y)) = 2 \underbrace{\sin(\tfrac{1}{2}(x+y))}_{\geq \frac{1}{6}(x+y)\text{, da } 0 \leq \frac{1}{2}(x+y)} \underbrace{\sin(\tfrac{1}{2}(x-y))}_{>0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y > x &\Rightarrow \cos(x) - \cos(y) > 0 \\
&\Rightarrow \cos(y) < \cos(x) \Rightarrow \text{ streng monoton fallend.}
\end{aligned}$$

Beweis von iii): Nach dem Additionstheorem von Lemma 16.9 gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0 \\
\cos(\pi) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = -1 \\
\sin(x+\pi) &= \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin(x) \\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x) \quad \square
\end{aligned}$$

Übung: $\cos(2) < 0$, Rest Selbst!

Kapitel V

Differentation

17 Definition und Grundeigenschaften

17.1 Definition: Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a, b)$, wenn der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Dann heißt $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f an der Stelle x_0.
Wenn f differenzierbar an allen $x_0 \in (a, b)$ ist, dann bezeichnet f' auch die Ableitungsfunktion $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$.
Mit anderen Worten: Der auf $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ stetige Differenzenqoutient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hat an der Stelle x_0 eine hebbare Unstetigkeit und der Grenzwert gibt die Tangentensteigung an. Wenn die unabhängige Variable $x = t$ die Zeit representiert, dann ist $f'(t_0)$ die änderungsgeschwindigkeit von $f(t)$ zu t_0.

Beispiele:

i): $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0} = a\frac{x-x_0}{x-x_0} = a$

ii): Für $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ mit $h = x - x_0 \to 0$ gilt:

$$\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \frac{x_0^n + nhx_0^{n-1} + \ldots - x_0^n}{h} = \frac{nhx_0^{n-1} + \ldots}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to h} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k} = \lim_{h \to 0} (\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k}}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx_0^{n-1} = [x^n]' = \frac{df}{dx}$$

iii): $f(x) = \exp(x)$:

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} (\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0))$$
$$= \lim_{h \to 0} (\exp(x_0) \left(\frac{\exp(h)-1}{h}\right)) \underset{\text{Lemma 16.1}}{=} \exp(x_0) \cdot 1 = \exp(x_0)$$

Wichtig: $c\exp(x) = ce^x$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist die einzige Funktionenklasse, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen: $f'(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = ce^x$ für $c \in \mathbb{R}$

iv): $f(x) = \cos(x)$:

$$\Rightarrow \tfrac{1}{h}(\cos(x_0+h)-\cos(x_0)) = \tfrac{1}{h}(\cos(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)\sin(h)-\cos(x_0))$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\cos(x_0)\tfrac{(\cos(h)-1}{h} - \sin(x_0)\tfrac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\lim_{h\to 0}\tfrac{\cos(h)-1}{h} + \sin(x_0)\lim_{h\to 0}\tfrac{\sin(h)}{h}$$
$$= \cos(x_0)\cdot 0 - \sin(x_0)\cdot 1 = -\sin(x_0) \Rightarrow \tfrac{d}{dx}\cos(x)$$
$$= -\sin(x)$$

Alternative Schreibweisen für die Ableitung: $f'(x_0) = \frac{d}{dx}f(x)\mid_{x=x_0} = \frac{df}{dx}\mid_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\mid_{x=x_0}$, falls $y = f(x)$.

Vorgriff zur Verständlichkeit: Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden und sind dort insbesondere beliebig oft differenzierbar.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(x)$$

Entsprechendes gilt für $\sin(x), \cos(x), \ldots$
Einfaches Beispiel einer stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktion:

$$f(x) = |x| = abs(x) = \begin{cases} x & \text{,falls } x \geq 0 \\ -x & \text{,falls } x < 0 \end{cases}$$

Nahe eines beliebigen $x_0 \neq 0$ gilt entweder $abs(x) = x$ oder $abs(x) = -x$ und es ergibt sich die Ableitung

$$abs'(x) = \frac{d}{dx}abs(x) = \begin{cases} 1 \text{ , falls } x > 0 \\ -1 \text{ , falls } x < 0 \end{cases}$$

Am Ursprung $x_0 = 0$ gilt für eine Folge $x_n = \frac{(-1)^n)}{n}$:

$$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = \frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n \leftarrow \text{ divergent}$$

Trotzdem ist $f(x) = abs(x)$ relativ gutmütig und lässt sich immer noch richtungsdifferenzieren im folgenden Sinne:

17.2 Definition: Links- und Rechtsdifferenzierbarkeit

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}(a,b)$ heißt an $x_0 \in (a,b)$ links- und/oder rechtsdifferenzierbar, falls folgende Grenzwerte existiert:

$$f'_-(x) = \lim_{h\nearrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ beziehungsweise } f'_+(x) = \lim_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Für beliebiges ϕ bedeutet $\lim\limits_{x\nearrow a}\phi(x) = c$, dass für alle Folgen $(x_n) \subset \{a > x \in \mathbb{R}\}$ mit $x_n \to a$ gilt:

$$\lim_{x_n\to a}\phi(x_n) = c$$

Entsprechend $\lim\limits_{x\searrow a}\phi(x) = \tilde{c}$

$$\phi(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 \text{ , für } x > 0 \\ 0 \text{ , für } x = 0 \\ -1 \text{ , für } x < 0 \end{cases} \quad , \lim_{x\nearrow 0}\phi(x) = -1, \lim_{x\searrow 0}\phi(x) = 1$$

Man nennt $f'_-(x)$ und $f'_+(x)$ dann die links- und rechtsseitige Ableitung und $f(x)$ selbst richtungsdifferenzierbar an der Stelle x, falls beide existieren.
Beispiel: $f(x) = |x| \Rightarrow f'_-(0) = -1$ und $f'_+(0) = 1$

17.3 Lemma: Zusammenhang von Richtungsdifferenzierbarkeit und Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}(a,b)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar genau dann wenn die Richtungsableitungen $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ existieren und den gleichen Wert haben.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

An der Stelle $x_0 = 0$ gilt: $f'_-(0) = \lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{f(h)+0}{h} = \lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{0}{h} = 0 = \lim\limits_{h \searrow 0} h^{\frac{1}{2}} = \lim\limits_{h \searrow 0} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{h} \Rightarrow f'_+(0) = 0$ existiert.

Beweis

Es gilt jeweils für gegebenes $\epsilon > 0$ und geeignetes $\delta > 0$, dass:

i) bei Differenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'(x)| < \epsilon$ für $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$

ii) bei Linksdifferenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'_-(x)| < \epsilon$ für $h \in (-\delta, 0)$

iii) bei Rechtsdifferenzierbarkeit: $|\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - f'_+(x)| < \epsilon$ für $h \in (0, \delta)$

Offensichtlich folgt aus i) sowohl ii) als auch iii) mit $f'_-(x) = f'(x) = f'_+(x)$. Umgekehrt implizieren ii) und iii) mit $f'_-(x) = f'_+(x)$ die Aussage i) mit $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$.
Beispiele wichtiger nur stückweise differenzierbare Funktionen sind: $f(x) = \max(f_1(x), ..., f_n(x))$, $f(x) = \min(f_1(x), ..., f_n(x))$ zum Beispiel in Tschebyschew-Approximation oder in Wirtschaftswissenschaften.

17.4 Satz: Ableitungen von Summen, Produkten, Qoutienten

Falls $f, g \in \mathcal{C}(a,b)$ und an der Stelle x_0 differenzierbar sind, so sind folgende Kombinationen auch differenzierbar mit den angegebenen Ableitungswerten:

i) **Linearität** (Additiviät und Homogenität der Ableitung):
$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \ni \beta \Rightarrow h'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

ii) **Produktregel:** $h(x) = f(x)g(x) \Rightarrow h'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

iii) **Qoutientenregel:** $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis

i) offensichtlich beim Hinschreiben

ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} [\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}] \\
&= \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot [\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}] + \lim_{x \to x_0} [f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}] \\
&= \lim_{x \to x_0} g(x) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)
\end{aligned}$$

iii) eventuell Übung.

Beispiele: Die schon bewiesene Aussage $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ für $n \geq 0$ lässt sich mit der Produktregel durch Induktion Überprüfen:

$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}(x \cdot x^{n-1}) = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot \frac{d}{dx}x^{n-1} = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} \Leftarrow$ Induktionsannahme

Die Qoutientenregel ergibt für $n < 0$:

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^{-n}} = \frac{0 \cdot x^{-n} - (-n)x^{-n-1} \cdot 1}{(x^{-n})^2} = \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}$$

Frage: Was passiert bei Hintereinanderausführung: $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \ldots \xrightarrow{h}$ (Komposition)
$x \in (a,b) \subset \mathbb{R}, y = f(x), z = g(y) \Rightarrow h(x) = g(f(x))$

17.5 Satz: Kettenregel

Sei $f \in \mathcal{C}(a,b)$ an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und g auf der Umgebung $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ von $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ in der Umgebung $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ von x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\frac{dh(x)}{dx} |_{x_0} = h'(x_0) = \frac{dz}{dx} |_{x=x_0} = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Eselsbrücke nach Leibniznotation: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$

Beweis

Wegen der Stetigkeit von f gilt für $x \to x_0 \Rightarrow y = f(x) \to y_0 = f(x_0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} [(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}] \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)f'(x_0)\end{aligned}$$

Dieser Beweis ist gültig, falls $f'(x_0) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$ und sonst $f(x) \neq f(x_0)$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$.
Allgemeiner betrachte die Darstellung:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ wobei } G(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{falls } y \neq y_0 \\ g'(y_0) \end{cases} \quad \text{für festes } y_0$$

Differenzierbarkeit von g an y_0 ist äquivalent zur Stetigkeit von $G(y)$ an $y = y_0$. Also folgt aus den Grenzwertsätzen, dass:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} G(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} G(f(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} G(y)f'(x_0) \\ &= G(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \ \square\end{aligned}$$

Beispiel: $\sin(x^n) = g(f(x))$ mit $f(x) = x^n, g(y) = \sin(y), f'(x) = nx^{m-1}, g'(y) = \cos(y)$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \underbrace{\cos(x^n)}_{\text{äußere Ableitung}} \quad nx^{n-1}$$

17.6 Definition: Minima und Maxima

Für $f : D \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in D$ ein lokales Minimum beziehungsweise lokales Maximum, wenn gilt:

$$\delta > 0, x \in B_\delta(x_0) = \{x \in D : |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \text{ bzw. } f(x) \leq f(x_0)$$

Falls Aussage für beliebiges δ gilt, heißt x_0 globales Minimum bzw. Maximum von f auf D.
Beispiel: $f(x) = \frac{(1+\cos(x))}{(1+x^2)}$ auf $D = \mathbb{R}$ alle lokalen Minima sind globale Minima mit Minimalwert 0. Nur das lokale Maximum $f(0) = 2$ ist auch globales Maximum.

17.7 Satz: Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung (1. Ableitung)

Sei f auf $[a, b]$ stetig, in (a, b) differenzierbar und an $x = a$ rechts und an $x = b$ links differenzierbar. Dann gilt für jedes lokale Minimum $x_0 \in [a, b]$ entweder:

i) $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$

ii) oder $a = x_0$ und $f'_+(x_0) \geq 0$

iii) oder $x_0 = b$ und $f'_-(x_0) \leq 0$

Beweis

Falls $x_0 < b$ folgt aus Minimalität, dass $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$
Dies beweist iii) für $x_0 = b$. Entsprechend für $x_0 > a$ gilt $f'_-(x_0) \geq 0$. Für alle $x_0 \in (a, b)$ gilt sowohl $f'_+(x_0) \geq 0$ als auch $f'_-(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\square$
Bemerkung: Obige Aussagen sind notwendige Bedingungen für Optimalität. Hinreichend für Minimalität (lokal) von $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ ist, dass $f'_+(a) > 0$ beziehungsweise $f'_-(b) < 0$. Für Maximalität von f an x_0 gilt dieselbe Stationaritätsbedingung $f'(x_0) = 0$ bei $x_0 \in (a, b)$ und am Rand müssen jeweils die Ungleichung invertiert werden.
Allgemein werden Optimierungsprobleme (Extremwertaufgaben) als Minimierungsprobleme formuliert (keine Einschränkung der Allgemeinheit, da $\max\{f(x) \mid x \in D\} = -\min\{-f(x) \mid x \in D\}$).

17.8 Satz: Zwischenwertsatz der Differentation

Falls $f \in \mathcal{C}[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) existiert mindestens ein Zwischenwert x mit :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \text{ beziehungsweise } f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Beweis

Betrachte die stetige Funktion $\phi(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) \Rightarrow \phi(a) = 0 = \phi(b)$ und ϕ in (a, b) differenzierbar $\Rightarrow \phi$ hat ein Minimum oder Maximum an $x \in [a, b]$ nach Weierstrass. Falls Maximalwert gleich Minimalwert muss gelten $\phi(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow \phi'(x) = 0\ \forall\, x \in (a, b)$. Ansonsten ist entweder Max oder Min ungleich 0 und wird somit an $x_0 \in (a, b)$ anngenommen:

$$\Rightarrow \phi'(x_0) = 0 \text{ nach Satz 17.7 } \Leftrightarrow 0 = \phi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \square$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, [a, b] = [0, 1]$
$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$ Zwischenwertsatz gilt für x mit $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$
Bemerkenswert: f ist am linken Rand noch nicht einmal richtungsdifferenzierbar, da Tangente vertikal.

17.9 Korollar: monotone und streng monotone Steigung

Eine auf (a, b) differenzierbare Funktion f ist streng monoton steigend beziehungsweise streng monoton fallend, wenn entweder:

$$\forall\, x \in (a, b) : f'(x) > 0 \text{ beziehungsweise } \quad \forall\, x \in (a, b) : f'(x) < 0$$

Sie kann nur monoton sein, wenn diese Bedingungen schwach erfüllt sind, dass heißt:

$$\inf_{a<x<b}(f'(x)) \geq 0 \text{ oder } \sup_{a<x<b}(f'(x)) \leq 0$$

Beweis

Es gilt für $a < \tilde{a} < \tilde{b} < b$ nach Mittelwertsatz $f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) = (\tilde{b} - \tilde{a})f'(x)$ für $x \in (\tilde{a}, \tilde{b})$. Es folgt:

$$f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{ strenges Wachstum folgt aus } f'(x) > 0$$

$f(\tilde{b}) - f(\tilde{a}) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, zum Beweis der Notwendigkeit von $\inf(f'(x)) \geq 0$ für schwach monotones Steigen nehme an, dass $f'(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ &\Rightarrow f \text{ nicht monoton wachsend - Widerspruch.}\end{aligned}$$

17.10 Satz: Existenz und Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen

Falls die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ für alle $x \in (a, b)$ existiert und positiv ist, so besitzt eine stetige funktion $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$, eine Inverse $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$. Diese ist für alle $y_0 \in (f(a), f(b))$ differenzierbar und es gilt:

$$[f^{-1}(y_0)]' \equiv \frac{d}{dy} = f^{-1}(y) \mid_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

wobei $y_0 = f(x_0)$ beziehungsweise $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Die Aussage gilt entsprechend wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweis

Strenge Monotonie folgt aus Korollar 17.9. Dadurch ist die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion garantiert. Außerdem gilt:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1} - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

da $f'(x_0) \neq 0$ nach Vorraussetzung.

17.11 Korollar: besondere Ableitungen

i) $\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}$

ii) $\frac{d}{dx} x^y = yx^{y-1}$ für $0 < x \in \mathbb{R}$

iii) $\frac{d}{dx} y^x = \log(y) y^x$ für $0 < y \in \mathbb{R}$

Beweis

Nach vorherigem Satz folgt aus $\log(y) = f^{-1}(y)$:

i) Umkehrfunktion von $f(x) = \exp(x)$, somit: $\frac{d}{dy} \log(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}$

ii) $\frac{d}{dx} x^y = \frac{d}{dx} \exp(y \log(x)) = \exp(y \log(x)) \left(\frac{y}{x}\right) = x^y \frac{y}{x} = yx^{y-1} (y \equiv n)$

iii) $\frac{d}{dx} \exp(x \log(y)) = \log(y) \exp(x \log(y)) = \log(y) y^x$ $\square$

17.12 Satz: Lipschitzstetigekeit stetiger, differenzierbarer Funktionen

Sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann ist f auf $[a, b]$ lipschitzstetig stetig genau dann wenn $L_0 \equiv \sup(|f'(x)| : a < x < b) < \infty$. Falls endlich ist L_0 kleinstmögliche Konstante auf $[a, b]$.

Beweis

Falls f lipschitzstetig mit Konstante L folgt $\forall\, x_0 : |f'(x_0)| = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq L \Rightarrow L \geq L_0$
Umgekehrt gilt nach dem Mittelwertsatz, dass $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| = |f'(z)|$ für $x < z < y$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1+\cos(x)}{1+x^2} \Rightarrow |f'(x)| &= \frac{|(-\sin(x))(1+x^2) - 2x(1+\cos(x))|}{(1+x^2)^2} \\ &\leq \frac{1+x^2+2|x|2}{(1+x^2)} \leq \frac{(1+2x)^2}{(1+x^2)^2} \leq 4 \end{aligned}$$

mit $1 + x^2 + 4|x| \leq 1 + 4x^2 + 4x \leq (1+2x)^2$ und $|\sin(x)| \leq 1 \geq |\cos(x)|$.

18 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

18.1 Satz: Satz von Rolle

Sei $a < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f differenzierbar auf $]a,b[$. Dann existiert $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis

Folgt direkt aus dem Mittelwertsatz.

18.2 Satz: verallgemeinerte Mittelwertsatz

Sei $f, g \in \mathcal{C}([a,b]), f, g$ differenzierbar auf $]a,b[$ und $g'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in]a,b[$. Dann existiert $\xi \in]a,b[$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis

Setzen $\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$.
Es gilt: $\phi \in \mathcal{C}([a,b])$ differenzierbar auf $]a,b[$ sowie $\phi(a) = 0 = \phi(b)$
Bemerkung: $g(b) \neq g(a)$ wegen Vorraussetzung und Rolle.
Satz von Rolle liefert: $\exists\, \xi \in]a,b[: 0 = \phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$ □

18.3 Satz: Zwischenwertsatz für Ableitungen

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a,b]$ mit $f'(a) \neq f'(b)$.
Dann nimmt f' jeden Wert in $[f'(a), f'(b)]$ beziehungsweise $[f'(b), f'(a)]$ an.
Bemerkung: f' muss hierzu nicht stetig sein.

Beweis

später

18.4 Satz: Regel von l'Hospital

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty, f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in]a,b[$. Weiterhin gelte:

i) $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ oder

ii) $\lim\limits_{x \to b} |g(x)| = \infty$

Falls nun der eigentliche ($\in \mathbb{R}$) oder uneigentliche ($\in \infty$) Grenzwerte $\lim\limits_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte sind gleich.
(Analog für $x \to a$)

Beweis

Betrachten nur $A = \lim\limits_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$.

i) $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$:

Fall 1: f, g stetig auf $(a, b]$ fortsetzbar, dass heißt insbesondere $b \in \mathbb{R}, f(b) = 0 = g(b)$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig, $x \in]b-\delta, b[$ für $0 < \delta < b - a$ derart, dass $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \epsilon\ \forall\ x \in]b-\delta, b[$. Wegen dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in]x, b[$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Also $|\frac{f(x)}{g(x)} - A| = |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A| < \epsilon$

Fall 2: $b = \infty$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0$. Wir definieren:

$$F(y) := \begin{cases} f(\frac{1}{y}) & ,0 < y < \frac{1}{a} \\ 0 & ,y = 0 \end{cases}, G(y) := \begin{cases} g(\frac{1}{y}) & ,0 < y < \frac{1}{a} \\ 0 & ,y = 0 \end{cases}$$

Damit gilt: $F, G \in \mathcal{C}([0, \frac{1}{a}[)$ (wegen $\lim\limits_{y\to\infty} f(\frac{1}{y}) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$) und $F'(y) = -\frac{1}{y^2}f'(\frac{1}{y}), G'(y) = -\frac{1}{y^2}g'(\frac{1}{y})$ für $y \in]0, \frac{1}{a}[$, also wegen Fall i) Fall 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{F(\frac{1}{x})}{G(\frac{1}{x})} = \lim_{y\to 0}\frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ii) $\lim\limits_{x\to b} |g(x)| = \infty$

Fall 1: $b \in \mathbb{R}$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Vorraussetzung ein $0 < \delta_0 < b - a$ mit $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\epsilon}{4} \forall x \in]b-\delta_0, b[$ und wegen (o.B.d.A.) $g(x) \xrightarrow{x\to b} \infty$ existiert auch $0 < \delta < \delta_0$ mit $|\frac{f(b-\delta_0)-A\cdot g(b-\delta_0)}{g(x)}| < \frac{\epsilon}{2}$ sowie $|\frac{g(b-\delta_0)}{g(x)}| \leq 1\ \forall\, x \in]b-\delta_1, b]$. Nach dem Mittelwertsatz existiert für beliebiges $x \in]b-\delta_0, b[$ ein $\xi \in]b-\delta_0, x[$ mit $\frac{f(x)-f(b-\delta_0}{g(x)-g(b-\delta_0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Also gilt:

$$\begin{aligned} |\frac{f(x)}{g(x)} - A| &= |\frac{f(b-\delta_0)-a\cdot g(b-\delta_0)}{g(x)} + (1 - \frac{g(b-\delta_0)}{g(x)})(\frac{f(x)-f(b-\delta_0)}{g(x)-g(b-\delta_0)} - A)| \underset{\triangle-Ungl.}{<} \frac{\epsilon}{2} + 2|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon \end{aligned}$$

Fall 2: analog $\square$

Beispiele

- [Typ $\frac{0}{0}$]Erste Standardtyp i).

  : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1$

- [Typ $\frac{1}{0}$]$\rightsquigarrow$ l'Hospital nicht anwendbar

  $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$ existiert nicht (Häufungspunkt $\pm\infty$), aber Anwendung von l'Hospital würde liefern: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{1} = 1$

- [Typ $\frac{0}{1}$]$\rightsquigarrow$ l'Hospital nicht anwendbar, aber Grenzwert existiert nach den Grenzwertsätzen.
  - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x+1} = 0$ (l'Hospital ergäbe: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$)
- [Typ $\frac{\infty}{\infty}$]Zweite Standardtyp ii).
  - $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^m+1)}{\log(x^n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx^{m-1}}{x^m+1} \frac{x^n}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx^m}{n(x^n+1)} = \frac{m}{n} \quad m,n\in\mathbb{N}$
  - $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x+\cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\cos(x)}{x}} = 1$ (Grenzwertsätze), l'Hospital nicht anwendbar, da $(x+\cos(x))' = 1-\sin(x)$ nicht $\neq 0\ \forall\, x$ beziehungsweise hinreichend große x.
- [Typ $0\cdot\infty$]$\rightsquigarrow$ Umformen zu Brüchen: $\frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$
- [Typ 1^∞]$\rightsquigarrow$ Umformen mittels exp $\rightsquigarrow e^{Typ}$ wegen Stetigkeit von e.

19 Ableitungen höherer Ordnung

19.1 Definition: k-fache Differenzierbarkeit

$f:]a,b[\to\mathbb{R}$ heißt k-mal differenzierbar in $x_0\in]a,b[$, wenn:

$$\forall\, 0\le j<k : f^{(j+1)}(x_0) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f^{(j)}(x_0+h)-f^{(j)}(x_0))$$

existieren (insbesondere muss f $(k-1)$mal differenzierbar auf einer Umgebung von x_0 sein. Betrachte ja Grenzwerte!).
Dabei gilt: $f^{(0)} := f, f^{(1)} = f'$ usw. Entsprechend heißt f k-mal differenzierbar auf $]a,b[$, wenn f k-mal differenzierbar $\ \forall\, x_0\in]a,b[$.
Bezeichung: $\mathcal{C}^k(]a,b[)$ = Raum aller auf dem Intervall k-mal differenzierbaren Funktionen mit $f^{(k)}\in\mathcal{C}(]a,b[)$.
$\mathcal{C}^\infty(]a,b[) := \bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{C}^1(]a,b[)$ = beliebig oft (stetig) differenzierbare Funktionen.

19.2 Satz: Leibniz-Regel, Produktregel für höhere Ableitungen

Sei $f,g:I\to\mathbb{R}$ k-mal differenzierbar auf dem Intervall I. Dann ist $f\circ g$ auch k-mal differenzierbar und $(f\cdot g)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x)$

Beweis

Induktion mit Proiduktregel und Summenragel für 1. Ableitung analog zur binomischen Formel □

19.3 Satz Taylorformel

Taylopolynome und Taylorentwicklung.
Motivation: Entwicklung von Polynomen $p(x)$ in Punkten $y\neq 0$,$p(x) = p_nx^n+\ldots+p_1x+p_0$.
Setze $x=y+h, h=x-y$:

$$p(y+h) = \sum_{k=0}^{n}p_k(y+h)^k = \sum_{0<m\le k<n}p_k\binom{k}{m}y^{k-m}h^m = \sum_{m=0}^{n}h^m\cdot\sum_{k=m}^{n}p_k\binom{k}{m}y^{k-m}$$

$$\overset{k=m+l}{=}\sum_{m=0}^{n}\frac{h^m}{m!}\underbrace{\sum_{l=0}^{n-m}p_{m+l}\frac{(m+l)!}{l!}y^l}_{=a_m(y)}$$

$a_m(y)$ ist ein Polynom vom Grad höchstens $n-m$.
$\Rightarrow p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(y)\frac{(x-y)^k}{k!}$
y ist Parameter,des Entwicklungspunktes, x ist die Variable.
$p'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(0)\frac{k(x-y)^{k-1}}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(0)\frac{(x-y)^k}{k!}$
Die Ableiten verschiebt die Koeffizientenfolge $(a_0, a_1, ..., a_n)$ um eine Position nach links zu $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$
Per Induktion gilt: $p^{(m)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-m} a_{m+n}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}$.

Insbesondere folgt: $p^{(m)}(y) = a_m(y)$, womit die Entwicklung die Form $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{1} p^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}$ annimmt.

Was taugt diese Formel als allgemeine Näherung?

Sei $I = [a,b], a < b, f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-fach differenzierbar. Betrachte $p_y(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}$ als Näherung für $f(x)$. Betrachte nun x als festen Parameter und den Entwicklungspunkt y als Variable.
Setze: $\phi(y) := p_y(x) - f(x)$. Dann ist:

- $\phi(x) = p_x(x) - f(x) = 0$
- $\phi'(y) = f'(y) + \sum\limits_{k=1}^{n}[f^{(k+1)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!} - f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^{(k-1)}}{(k-1)!}] = f'(y) + f^{(n+1)}(y)\frac{(x-y)^n}{n!} - f'(y)$

$\phi(x)$ ist klein mit Ordnung n in $(x-y) \to \phi(y)$ klein mit Ordnung $(n+1)$.
Zum Satz: Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}, a < b, x_0 \in I, f : I \to \mathbb{R}$, (n+1)-fach differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\theta \in (0,1)$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Beweis

Sei ϕ wie oben definiert, $m \in \{1, \ldots, n+1\}$: $\frac{\phi(y)}{(x-y)^m} = \frac{\phi(y)-\phi(x)}{(x-y)^m-(x-x)^m} = \frac{\phi'(\tilde{x})}{-m(x-\tilde{x})^{m-1}}$ nach dem Mittelwertsatz mit $\tilde{x}$ zwischen x und y gilt :
$\tilde{x} = y + \theta(x-y)$, mit $\theta \in (0,1)$ und:

$$p_y(x) - f(x) = (x-y)^m \frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})\frac{(x-\tilde{x})^n}{n!}}{-m(x-\tilde{x})^{m-1}}$$

Setze nun $y = x_0, m = n+1$:

$$f(x) = \phi_{x_0}(x) + f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Bemerkung: $\mathcal{R}_n(x_0, x) := f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ ist das Lagrange-Restglied.

19.4 Korollar: Schlämilch-Restglied

Für jedes $x \in I, m \in \{1, \ldots, n+1\}$ gibt es ein $\theta \in (0,1)$ mit:

$$f(x) = p_{x_0}(x) + f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))\frac{(1-\theta)^{n-m+1}(x-x_0)^{n+1}}{n! \cdot m}$$

19.5 Beweis

$x - \tilde{x} = x - (x_0 + \theta(x - x_0)) = (1 - \theta)(x - x_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= p_{x_0}(x) + f^{(n+1)}(\tilde{x}) \frac{(x - \tilde{x})^{n-m+1}}{m \cdot n!}(x - x_0)^n \\ &= p_{x_0}(x) + f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^{n-m+1}}{m \cdot n!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

19.6 Definition: Entwickelbarkeit von Funktionen

Sei $I = [a, b], a < b$ ein Intervall, $f \in \mathcal{C}^\infty(I), x_0 \in I$. Dann heißt f um x_0 in eine Taylorreihe entwickelbar, wenn es eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 gibt, so dass $\forall\, x \in U : \lim_{n \to \infty} \mathcal{R}_n(x_0, x) = 0$.
Zur Anwendung folgt:

19.7 Satz: hinrechende Bedingung für Maxima

Sei $I = [a, b], f \in \mathcal{C}^2(I), x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$. Wenn $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum von f.

Beweis

Wegen f'' stetig und $f''(x_0) < 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f''(x) < 0$.

Sei $x \in I, |x - x_0| < \delta$:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2$ mit $\theta \in (0, 1) \Rightarrow |(x_0 + \theta(x - x_0) - x_0| = \theta|x - x_0| < \delta$, dass heißt $f(x) - f(x_0) < 0$ und dann $f(x) < f(x_0)$.

Kapitel VI

Integration

20 Das bestimmte Integral nach Riemann

Motivation: Berechnung von Flächen unter Kurven, Volumen unter Flächen, usw..

20.1 Eigenschaften des Integrals

$\int_a^b f(x)dx$ heißt Integral, falls für alle „geeigneten“Funktionen $f, g : [a, b]$ gilt:

i) $\int_a^b \gamma f(x)dx = \gamma \int_a^b f(x)dx$ für $\gamma \in \mathbb{R}$ **(Homogenität)**.

ii) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ **(Aditivität)**.

iii) $\int_a^b f(x)dy \leq \int_a^b g(x)dx$, falls $f(x) \leq g(x)$ für $a \leq x \leq b$ **(Monotonität)**.

iv) $|\int_a^b f(x)dx| \leq (b-a)||f||_\infty$ **(Beschränktheit)**, wobei $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty$ vorausgesetzt.

20.2 Definition: Treppenfunktion

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise konstant, wenn es eine Zerlegung $Z = (x_i)_{i=0}^n$ gibt, so dass $a = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = b$ und es existieren $(c_i)_{i=0}^n$ mit $c_i = f(x)$ für $x \in (x_{i-1}, x_i), f(x_i) \in [\min(c_i, c_{i+1}), \max(c_i, c_{i+1})]$
Die Menge dieser Treppenfunktionen bezeichnet man mit $T[a, b]$.

20.3 Lemma: Verknpfung von Treppenfunktionen

Falls $f, \tilde{f}$ mit Zerlegungen $Z, \tilde{Z}$ zu $T[a, b]$ gehören, so gilt dies auch für $\gamma f, f + \tilde{f}$ und $f - \tilde{f}$. Für letztere ist die Zerlegung $Z \cup \tilde{Z}$ geeignet (Hierbei müssen Elemente von $Z \cup \tilde{Z}$ neu monoton geordnet werden).

Beweis

per Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{,für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, Z = [0, \frac{1}{2}, 1]$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2 & \text{für } \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \text{für } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}, \tilde{Z} = [0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1]$$

$$\Rightarrow Z \cup \tilde{Z} \text{ umgeordnet } = [0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}], f + \tilde{f} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

20.4 Definition und Lemma: Integral und Summe

Für $f \in T[a,b]$ ist das Integral $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i \in \mathbb{R}$ eindeutig definiert und erfüllt die nach Definition 20.1 geforderten Eigenschaften.

Beweis

Angenommen $f \in T[a,b]$ hat zwei Zerlegungen $Z \subset \tilde{Z}$, dass heißt $\tilde{Z}$ ist Verfeinerung von Z. Dann gibt es für jedes Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ mit $x_{i-1}, x_i \in \mathbb{Z}$ Punkte $\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j, \ldots, \tilde{x}_k \in \tilde{Z}$, so dass:

$$x_{i-1} = \tilde{x}_{j-1} < \tilde{x}_j \ldots < \tilde{x}_k = x_i$$

Dann folgt aus Definition von $f \in T[a,b]$, dass $c_i = \tilde{c}_l$ für $l = j, \ldots k$, somit:

$$c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{l=j}^{k} (\tilde{x}_l - \tilde{x}_{l-1})\tilde{c}_l$$

Summation über $i = 1, \ldots, n$ ergibt die Identität des Integralwertes von f für Z und $\tilde{Z} \supset Z$.

Für ein beliebiges Paar $Z, \tilde{Z}$ von f gilt, dass $Z \cup \tilde{Z} \supset Z$ und $Z \cup \tilde{Z} \supset \tilde{Z}$, dass heißt Verfeinerung von Z und $\tilde{Z}$. Also ist das Integral durch $Z, \tilde{Z}$ und $Z \cup \tilde{Z}$ identisch definiert.

Beweis der Homogenität: Falls Z Zerlgeung von $f \in T[a,b]$, ist es auch eine geeignete Zerlgeung von $\tilde{f} = \gamma f$ mit $\tilde{c}_i = \gamma c_i$. Also folgt:

$$\int_a^b \gamma f dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\gamma c_i = \gamma \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i = \gamma \int_a^b f(x)dx$$

Beweis der Aditivität: Mit der Hilfe von $Z \cup \tilde{Z}$ wie bei der Eindeutigkeit.
Entsprechend für **Monotonie**. **Beschränktheit** folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(x)dx| &= |\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |c_i(x_i - x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |c_i|(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq i \leq n}(|c_i|)(x_i - x_{i-1}) = ||f||_\infty \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = ||f||_\infty (b-a) \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Linearität und Beschränktheit implizieren, dass für $f, g \in T[a,b]$ gilt:

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx| = |\int_a^b (f(x) - g(x))dx| \leq (b-a)||f-g||_\infty$$

Mit anderen Worten: Das Integral als Abbildung des linearen Raumes $T[a,b]$ in die reellen Zahlen ist lipschitz-stetig.

20.5 Definition und Lemma: Konvergenz einer Folge von Treppenfunktionen

Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Grenzwert einer Folge von $f_n \in T[a,b]$ im Sinne von $||f - f_n||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ist, dann definiert $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ eindeutig ein Integral.

Beweis

Für $\phi_n = \int_a^b f_n(x)dx$ gilt:

$$|\phi_n - \phi_m| = |\int_a^b f_n(x) - f_m(x)dx| \leq (b-a)||f_n - f_m||_\infty \leq (b-a)(\underbrace{||f_n - f||_\infty}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{||f_m - f||_\infty}_{\text{Cauchyfolge}})$$

$$\Rightarrow (\phi_n)_{n=1}^\infty \text{ ist Cauchyfolge mit eindeutigem Grenzwert.}$$

Falls auch $\tilde{f}_m \to f$, gilt für: $\tilde{\phi}_m = \int_a^b \tilde{f}_m(x)dx$:

$$|\phi_n - \tilde{\phi}_m| = |\int f_n(x) - \tilde{f}_m(x)dx| \leq (b-a)||f_n - \tilde{f}_m|| \to 0$$

20.6 Satz: Existenz einer passenden Treppenfunktion (Teil 1)

Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert genau dann eine Folge $f_n \in T[a,b]$ mit $||f - f_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, wenn folgende Grenzwerte existieren:

$$f_+(x) = \lim_{h\searrow 0} f(x+h) \text{ für } x \in [a,b) \text{ und } f_-(x) = \lim_{h\nearrow 0} f(x-h) \text{ für } x \in (a,b]$$

Mit anderen Worten: f muss auf ganz $[0,1]$ links- und rechtsstetig sein (Es kann abzählbar viele Sprünge mit $f_-(x) \neq f_+(x)$ geben).
Beispiel einer Funktion, die 20.6 nicht erfüllt, aber trotzdem riemannintegrierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \text{ auf } [0,1]$$

Beweis

Setzen die Existenz der linken und rechten Grenzwerte voraus.
Annahme: $||f - g||_\infty > \epsilon \quad \forall\ g \in T[a,b]$. Dann ist die Restriktion von f auf $[a, \frac{a+b}{2}]$ oder $[\frac{a+b}{2}, b]$ auch nicht $\epsilon-$approximierbar:

$$\sup_{a_1 \leq x \leq b_1} \{|f(x) - g(x)|\} > \epsilon \text{ für } [a_1, b_1] = [a, \tfrac{a+b}{2}] \vee [a_1, b_1] = [\tfrac{a+b}{2}, b]$$

Entsprechend kann man $[a_1, b_1]$ weiter halbieren und erhält eine Intervallfolge $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$ mit $(b_{i+1} - a_{i+1}) = \frac{1}{2}(b_i - a_i)$. Außerdem sind die a_i monoton steigend und die b_i monoton fallend:

$$x = \lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i$$

Wegen der Halbstetigkeit existiert $\delta > 0$, so dass $|h| < \delta \Rightarrow |f(x-h) - f_-(x)| < \frac{\epsilon}{2} > |f(x+h) - f_+(x)|$

Deshalb ist die Funktion $g(\tilde{x}) = \begin{cases} f_-(x) & \text{falls } x - \delta < \tilde{x} < x \\ f_+(x) & \text{falls } x < \tilde{x} < x + \delta \end{cases}$ eine Treppenfunktion auf $[x-\delta, x+\delta]$ für die $\sup\{f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) : x - \delta \leq \tilde{x} \leq x + \delta\} \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Da $(b_i - a_i) \to 0$ und $x \in [a_i, b_i]$ ist g für hinreichend großes i durch ϵ Annäherung von f auf $[a_i, b_i]$ im Widerspruch zur Konstruktion dieser Intervalle. $\Rightarrow$ Die Folge f_n muss existieren $\square$

Hierarchie von linearen Funktionenräumen auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$:

$$T[a,b] \subset R_e[a,b] \subset B[a,b], R_e[a,b] \supset \mathcal{C}[a,b]$$

- $B[a,b]$: Raum aller $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die beschränkt sind: $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty$
- $T[a,b]$: Raum aller $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, für die eine Treppenzerlgeung $Z = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ existiert, so dass $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \leq b$ und es existieren Konstanten $(c_i)_{i=1}^n$, so dass $f(x) = c_i$, falls $x_{i-1} < x < x_i$, $f(x_i) \in [\min(c_i, c_{i-1}), \max(c_i, c_{i-1})] \Rightarrow ||f||_\infty = \max\{|c_i|, 1 \leq i \leq n\}$.

- $R_e[a,b]$: Raum der richtungsstetigen oder „regulated“Funktion, für die die Grenzwerte existieren:

$$f_+(x) = \lim_{h \searrow 0} f(x+h) \text{ an } x \in [a,b) \text{ und } f_-(x) = \lim_{h \nearrow 0} f(x+h) \text{ an } x \in (a,b]$$

- $C[a,b]$: ist der Unterraum der stetigen Funktionen, für die $f_-(x) = f_+(x)$ an $x \in (a,b)$.

Geometrische Vorstellung: $B[a,b] \approx \mathbb{R}^3$, Unterraum $T[a,b]$ sind Punkte in dieser Menge.
Der Abschluss des Unterraumes $T[a,b]$ bezüglich $||\cdot||_\infty$ ist $\overline{T} = R_e$.
(Durch die Definition des Integrals für die Treppenfunktionen kann man über den Abschluss diese Definition auf die richtungsstetigen Funktionen übertragen werden.)

20.7 Satz: Abschluss der Treppenfunktionen in Raum der richtungsstetigen Funktionen (Teil 2)

Es gilt, der Abschluss $\overline{T}[a,b] = R_e[a,b]$, dass heißt eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann richtungsstetig, wenn sie sich beliebig gut durch Treppenfunktionen annähern lässt.

Beweis

- „$\Rightarrow$“: Richtungstetigkeit impliziert Approximierbarkeit, wurde durch Widerspruchbeweis bewiesen (Teil 1).
- „$\Leftarrow$“: Für f und beliebiges $\epsilon > 0$ existiert eine Treppenfunktion $f_\epsilon \in T[a,b]$, so dass

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ für alle } x \in [a,b]$$

  Sei $Z = (x_i)_{i=1}^n$ die Zerlegung von f_ϵ. Dann existiert für beliebiges $\hat{x} \in [a,b)$ ein Index i, so dass $\delta \equiv \min\{x - x_i, x_i > \hat{x}\} > 0$.

  Entsprechend gilt für alle $h \in (0,\delta)$,dass: $f_\epsilon(\hat{x}+h) = c_i = f_\epsilon(\hat{x}+\tilde{h})$ falls $\tilde{h} \in (0,\delta)$

$$\Rightarrow |f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}+\tilde{h})| \le |f(\hat{x}+h) - c_i| + |c_i - f(\hat{x}+\tilde{h})|$$
$$\Leftrightarrow |f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}+\tilde{h})| \le \underbrace{|f(\hat{x}+h) - f_\epsilon(\hat{x}+h)|}_{\le \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|f(\hat{x}+\tilde{h}) - f_\epsilon(\hat{x}+\tilde{h})|}_{\le \frac{\epsilon}{2}} \le \epsilon \quad \square$$

Für beliebiges $f \in R_e[a,b]$ definieren wir das Integral durch: $\int_a^b f\ dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m(x)dx$, wobei $(f_m) \subset T[a,b]$ eine beliebige gegen f konvergierende Folge ist, dass heißt: $||f - f_m||_\infty \to 0$ für $m \to \infty$.

20.8 Satz: Integral im Raum der richtungsstetigen Funktionen

Das oben definierte Integral erfüllt für $f \in R_e[a,b]$ die in Definition 20.1 verlangten Eigenschaften.

Beweis

i) Linearität: $f = \lim_{m\to\infty} f_m \in R_e[a,b] \ni g = \lim_{m\to\infty} g_m$ mit $f_m, g_m \in T[a,b] \Rightarrow \alpha f_m + \beta g_m \in T[a,b]$, $\lim_{m\to\infty}(\alpha f_m + \beta g_m) = \alpha f + \beta g$

$$\Rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \lim_{m\to\infty} \int_a^b (\alpha f_m + \beta g_m)dx = \lim_{m\to\infty} [\alpha \int_a^b f_m dx + \beta \int_a^b g_m(x)dx]$$
$$\underset{m\to\infty}{=} \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

ii) Monotonie: Für $\epsilon = \frac{1}{m}$ existieren $f_m \in T[a,b] \ni g_m \Rightarrow |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{m}$ und $|g(x) - g_m(x)| < \frac{1}{m} \Rightarrow f_m - \frac{1}{m}$ und $g_m + \frac{1}{m}$ sind Treppenfunktionen mit $f_m(x) - \frac{1}{m} \leq f(x) \leq g(x) \leq g_m(x) + \frac{1}{m}$ für $x \in [a,b]$

$$\Rightarrow f_m(x) - \tfrac{1}{m} \leq g_m(x) + \tfrac{1}{m} \underset{\text{da Trp.-fkt. mon.}}{\Longrightarrow} \int_a^b [f_m(x) - \tfrac{1}{m}]dx \leq \int_a^b [g_m(x) + \tfrac{1}{m}]dx$$

$$\overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{m} \leq \int_a^b g(x)dx + \lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{m} = \int_a^b g(x)dx$$

$\Rightarrow$ ii) erfüllt.

Folgerung: Da sowohl stetige, wie auch monoton fallende oder steigende Funktionen überall richtungsstetig sind, ist damit die Existenz des bestimmten Integrales für diese wichtigen Funktionenklassen gesichert.
Frage: Wie lassen Integrale sich konsturktiv auswerden?
Antwort:

- Mit Hilfe von Riemannsummen $\Rightarrow$ numerische Auswertung
- Durch symbolische Umkehrrung der Differentationsregeln.

20.9 Definition: Riemannsche Summe

Für $f \in B[a,b]$ und eine Zerlegung $Z = (x_i)_{i=0}^n$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebige Stützstellen, setze: $R(f, Z, z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(f(z_i))$.
Die Feinheit $||Z|| = \max\{(x_i - x_{i-1}), i = 1, \ldots, n\} \in \mathbb{R}$ misst die Genauigkeit der Riemannschen Summe.

20.10 Satz: Konvergenz der riemannschen Summe

Für $f \in R_e[a,b]$ und eine beliebige Folge von Zerlegungen Z_n mit Stützstellen z_n gilt:

$$||Z_n|| \to 0 \Rightarrow R(f, Z_n, z_n) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$$

Beweis

später!

Beispiele:

i) $f(x) = e^x, \int_a^b e^x dx = ???$
Uniforme Zerlegung $x_i = a + ih, h = \frac{1}{n}(b-a)$. Auswertungsstellen: $z_i = x_{i-1} = a + (i-1)h$

$$\Rightarrow R(e^x, Z, z) = \sum_{i=1}^n h \cdot e^{a+(i-1)h} = he^a \sum_{i=0}^{n-1} (e^h)^{(i)} = he^a \frac{(e^h)^n - 1}{e^h - 1}$$
$$= \frac{h}{e^h - 1}[e^{b-a} - 1]e^a = \frac{h}{e^h - 1}[e^b - e^a]$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R(e^x, Z, z) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{(e^h - 1)}[e^b - e^a] = (e^b - e^a) \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h - 1} = e^b - e^a \quad \left(= \int_a^b e^x dx \right)$$

ii) $f(x) = \frac{1}{x}, \int_1^a \frac{1}{x}dx = ???$
$Z = (a^{\frac{i}{n}})_{i=0}^n, z_{i-1} = x_{i-1} = a^{\frac{i-1}{n}}, x_i - x_{i-1} = a^{\frac{i}{n}} - a^{\frac{i-1}{n}} = a^{\frac{i-1}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1):$

$$R(\tfrac{1}{x}, Z, z) = \sum_{i=1}^n (a^{\frac{1}{n}} - 1)a^{\frac{i-1}{n}} \frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}} = n \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R(\tfrac{1}{x}, Z, z) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(\log a)h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\log a)a^h}{1} = \log a$$
$$= \int_a^b \frac{1}{x}dx$$

Kette von linearen Räumen:

$$T[a,b] \subsetneq R_e[a,b] \subset R_i[a,b] \subsetneq B[a,b]$$

wobei die erste Ungleicheit durch $f(x) = x$ gezeigt werden kann und die zweite durch:
$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

20.11 Satz: Konvergenz der Riemannsummen bei Unstetigkeiten

Für $f \in R_e[a,b]$ und eine beiliebige Folge von Zerlegungen Z_n von [a,b] gilt:

$$||Z_n|| \to 0 \Rightarrow R(f, Z_n, z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

20.12 Beweis

Für drei Fälle:

i) f Treppe mit einer Unstetigkeit

ii) f Treppe mit m Unstetigkeiten

iii) $f \in R_e[a,b]$ beliebig

i) $f(x) = \begin{cases} f(a) & , \text{für } a \le x < m \\ f(b) & , \text{für } m < x \le b \end{cases}$
Für beliebige Zerlegung existiert genau ein Index i, so dass $m \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(m-a) + f(b)(b-m) \Rightarrow |\int_a^b f(x)dx - R(f, Z_n)|$$
$$= |f(a)(m - x_{i-1}) + f(b)(x_{i-1} - m) - f(z_i)(x_i - x_{i-1}) + f(z_{i+1})(x_{i+1} - x_i)|$$
$$\le |f(a)|(m - x_{i-1}) + |f(b)|(x_{i+1} - m) + |f(z_i)|(x_i - x_{i-1}) + |f(z_{i+1})|(x_{i+1} - x_i)$$
$$\le ||f||_\infty (x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot 2 \le 2||f||_\infty 2||Z_n||$$
$$\le 4||f||_\infty ||Z_n|| \to 0 \text{ wenn } n \to \infty \ \square$$

ii) Falls die Annahme für alle $f \in T[a,b]$ gilt mit $m-1$ Sprüngen, folgt für f mit m Sprüngen die Existens einer Zerlegung $f = f_1 + f_2$, wobei f_1 einen und f_2 $m-1$ Sprünge hat. Also gilt für eine beliebige Folge Z_n, dass:

$$\underbrace{R(f, Z_n)}_{\int_a^b f(x)dx} = \underbrace{R(f_1, Z_n)}_{\int_a^b f_1(x)dx} + \underbrace{R(f_n, Z_n)}_{\int_a^b f_2(x)dx}$$

wobei der letzte Term laut Induktionsvoraussetzung gilt.

iii)

$$f \in R_e[a,b] \Rightarrow \quad \forall\ \epsilon > 0\ \exists\, f_\epsilon \in T[a,b] : ||f - f_\epsilon||_\infty < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$
$$\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_\epsilon(x)dx| \le \frac{\epsilon}{4} \wedge |R(f,Z_n) - R(f_\epsilon, Z_n)| \le \frac{\epsilon}{4}$$

Weiterhin existiert $\delta > 0$, so dass $||Z_n|| < \delta \underset{nach\ ii.)}{\Rightarrow} |\int_a^b f_\epsilon(x)dx - R(f_\epsilon, Z_n)| < \frac{\epsilon}{4}$
Mit der Dreiecksungleichung folgt schließlich:

$$\underbrace{|\int_a^b f(x)dx - R(f,Z_n)|}_{\le \frac{3}{4}\epsilon < \epsilon\ \square} \le \underbrace{|\int_a^b [f(x) - f_\epsilon(x)]\,dx|}_{\le \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|\int_a^b f_\epsilon(x)dx - R(f_\epsilon, Z_n)|}_{\le \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{|R(f_\epsilon, Z_n) - R(f, Z_n)|}_{\le \frac{\epsilon}{4}}$$

Bemerkung: Der Satz beweist, dass Richtungsstetigkeit eine hinreichende Bedingung ist für die Konvergenz der Riemannsummen gegen einen eindeutigen Grenzwert, nämlich das Integral. Die Bedingung ist jedoch nicht notwendig. Umkehrung wie folgt:

20.13 Definition: Riemannintegriebarkeit

Eine beschränkte Funktion f heißt riemann-integriebar, wenn die Riemannsummen $R(f, Z_n)$ für beliebige Z_n mit $||z_n|| \to 0$ gegen einen Grenzwert konvergieren, der dann als das Riemann-Integral: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} R(f, Z_n) \in \mathbb{R}$ bezeichnet wird.

20.14 Satz: Integraleigenschaften der Riemannintegrierbarkeit

Das Riemannintegral erfüllt auf dem linearen Raum $R_i[a,b]$ der riemannintegriebaren Funktionen die in Definition 20.1 geforderten Eigenschaften.

Beweis

Über Riemannsummen statt Treppenfunktionen.

20.15 Lemma: Riemannintegriebarkeit aufgesplitteter Intervalle

Für $c \in (a,b)$ gilt: $f \in R_i[a,b] \Leftrightarrow f \in R_i[a,c] \wedge f \in R_i[c,b]$. In diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Beweis

- „$\Leftarrow$“: Annahme: $f \in R_i[a,c] \wedge f \in R_i[c,b]$. Betrachte nun eine beliebige Zerlgeung Z_n von $[a,b]$ mit $||Z_n|| \to 0$. Dann bilden $Z_n' = \{x_i \in Z_n : x_i < c\} \cup \{c\}$, $Z_n'' = \{x_i \in Z_n : x_i > c\} \cup \{c\}$ eine Zerlegung von $[a,c]$ und $[c,b]$ mit $||Z_n'|| \le ||Z_n|| \ge ||Z_n''||$

  Dann gilt:

  $$|\underbrace{R(f,Z_n)}_{\to\int_a^b f(x)dx} - \underbrace{R(f,Z_n')}_{\to\int_a^c f(x)dx} - \underbrace{R(f,Z_n'')}_{\to\int_c^b f(x)dx}| \le 2\underbrace{||f||_\infty}_{\to 0}||Z_n||$$

  existiert und ist eindeutig, da Z_n beliebig wählbar ist.

Beispiel einer Funktion $f \in R_i[0,1]$, die nicht richtungsstetig ist und deshalb nicht durch Treppenfunktionen angenähert werden kann, ist: $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) + 1 & ,\ \text{für } x > 0 \\ 0 & ,\ \text{für } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f_+(0)$ ist undefiniert.

Nach Lemma 20.15 gilt auf den Intervallen $[\epsilon, 1]$ mit $f \in \mathcal{C}[\epsilon, 1]$:

$$|\int_{\epsilon}^{1} f(x)dx - \int_{\epsilon'}^{1} f(x)dx| = |\int_{\epsilon}^{\epsilon'} f(x)dx| \leq |\epsilon - \epsilon'| \max(|f(x)|) \leq 2|\epsilon - \epsilon'|$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{n} f(x)dx$ existiert und es läßt sich zeigen, dass dies den Grenzwert aller $R(f, Z_n)$ mit Zerlegungen Z_n von $[0, 1]$ und $||Z_n|| \to 0$ ist.