



Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 2

Abgabe bis 03. November 2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 2.1: (Körper)

4 Punkte

Sei $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Zeigen Sie, dass K bezüglich der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen ein Körper ist. Dabei dürfen Sie verwenden, dass \mathbb{R} ein Körper ist.

Aufgabe 2.2: (Betrag)

4 Punkte

Beweisen Sie:

$$\text{Für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } |a + b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0.$$

Aufgabe 2.3:

4 Punkte

Finden Sie alle reellen Zahlen x , für die gilt:

a) $|3x - 5| - |2x + 3| > 0$;

b) $|(x^2 + 4x + 9) + (2x - 3)| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$.

Aufgabe 2.4: (Induktion)

4 Punkte

Beweisen Sie:

a) Für beliebige $a \neq 1$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

b) Für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n > 1 \implies \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 2.5:

4 Punkte

Sei $M := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \geq j\}$ die Menge aller Tupel natürlicher Zahlen (ohne Null) deren erste Komponente größer oder gleich der zweiten ist.

Zeigen Sie, dass die durch $(i, j) \mapsto j + \frac{i}{2}(i-1)$ definierte Abbildung von M nach \mathbb{N} eine Bijektion ist.

(Hinweis: Zeigen Sie die Surjektivität mittels einer Induktion und die Injektivität durch einen Widerspruchsbeweis.)