Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 2

Abgabe bis 03. November 2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 2.1: (Körper) *4 Punkte*

Sei $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
Zeigen Sie, dass K bezüglich der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen ein Körper ist. Dabei dürfen Sie verwenden, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

Aufgabe 2.2: (Betrag) *4 Punkte*

Beweisen Sie:

$$\text{Für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } |a + b| = |a| + |b| \quad \Longleftrightarrow \quad ab \geq 0.$$

Aufgabe 2.3: *4 Punkte*

Finden Sie alle reellen Zahlen x, für die gilt:

a) $|3x - 5| - |2x + 3| > 0$;

b) $|(x^2 + 4x + 9) + (2x - 3)| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$.

Aufgabe 2.4: (Induktion) *4 Punkte*

Beweisen Sie:

a) Für beliebige $a \neq 1$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

b) Für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n > 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 2.5: *4 Punkte*

Sei $M := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \geq j\}$ die Menge aller Tupel natürlichen Zahlen (ohne Null) deren erste Komponente größer oder gleich der zweiten ist.
Zeigen Sie, dass die durch $(i, j) \mapsto j + \frac{i}{2}(i-1)$ definierte Abbildung von M nach $\mathbb{N}$ eine Bijektion ist.
(*Hinweis: Zeigen Sie die Surjektivität mittels einer Induktion und die Injektivität durch einen Widerspruchsbeweis.)*