**Humboldt-Universität zu Berlin**
**Institut für Mathematik**
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

# Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
## Serie 3

Abgabe bis 10. November 2008 (vor der Vorlesung)

---

**Aufgabe 3.1:** *4 Punkte*

Für beliebige $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ wurde der binomische Koeffizient definiert als

$$\binom{x}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (x - i).$$

Zeigen Sie, dass für $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

a) $0 \leq k \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad \binom{n}{k} \neq 0.$

b) $0 \leq k \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

**Aufgabe 3.2:** (Minimum/Maximum reeller Zahlen) *4 Punkte*

Das Minimum bzw. Maximum zweier reeller Zahlen $x$ und $y$ wird durch:

$$\min(x, y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y, & \text{falls } x \geq y \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \max(x, y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y \\ y, & \text{falls } x \leq y \end{cases}$$

definiert.

a) Zeigen Sie: $\max(x, y) = -\min(-x, -y)$.

b) Beweisen Sie: $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

c) Leiten Sie eine analoge Formel wie in b) auch für $\max(x, y)$ her.

**Aufgabe 3.3:** (Monotone Folgen) *4 Punkte*

Zeigen Sie, dass die durch $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definierte Folge monoton wachsend ist. D.h. zeigen Sie mittels der Bernoulli–Ungleichung, dass $a_{n+1}/a_n \geq 1$ und mittels vollständiger Induktion, dass $m > n \implies a_m \geq a_n$ gelten.

**Aufgabe 3.4:** (Binomialsatz) *4 Punkte*

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ und $k$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn} \leq \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k.$$

D.h. für jedes $k \geq 2$ ergibt sich eine obere Schranke der eben definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Weisen Sie dazu nach und verwenden Sie, dass für $0 < r < 2$ in der folgenden Ungleichungskette alle einzelnen Ungleichungen gültig sind:

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \leq \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} r^m \leq 1 + r \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{r}{2}\right)^m \leq 1 + \frac{2r}{2-r}$$

**Aufgabe 3.5:** (Grenzwert von Folgen) *4 Punkte*

Sei $0 < q < 1$ eine reelle Zahl. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Verwenden Sie dazu die Substitution $q = 1/(1+a)$ mit einem $a > 0$ und entwickeln Sie den Nenner der $n$-ten Potenz nach dem Binomialsatz. Alternativ kann auch mittels Bernoulli-Ungleichung die Abschätzung $n \leq \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon)^n$ für beliebige $\varepsilon > 0$ nachgewiesen und verwendet werden.