Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 4

Abgabe bis 17. November 2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 4.1: (Supremum) *4 Punkte*

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere nach oben beschränkte Mengen. Zeigen Sie:

a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

b) Falls $A \cap B \neq \emptyset$, so $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Aufgabe 4.2: (Folgen) *4 Punkte*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

b) Jede Folge reeller Zahlen enthält eine monotone Teilfolge.

c) Jede monoton wachsende bzw. fallende Folge, die nicht konvergiert, divergiert bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Aufgabe 4.3: (Nullfolgen) *4 Punkte*

Beweisen Sie bzw. widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(i) $|x_n^2 + 2x_{n+1}| < \varepsilon$;

(ii) $|x_n| < n\varepsilon$;

(iii) $|x_n| < \varepsilon^2 + \varepsilon + 3\sqrt{\varepsilon}$;

(iv) $|x_{n+1}| < \varepsilon |x_n|$.

Aufgabe 4.4: (Konvergenz) *4 Punkte*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz und geben Sie ggf. deren Grenzwert an:

a) $x_n := \left(\frac{q}{q+1}\right)^n \frac{n^2+1}{2n^2+3}$ mit $q > 0$;

b) $x_n := n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

c) $x_n := n^2\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

Aufgabe 4.5: *4 Punkte*

Untersuchen Sie die mittels

$$x_1 := 1 \qquad \text{und} \qquad x_{n+1} := x_n \left(1 - \frac{17}{n^2}\right)$$

definierte Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.