HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. J. HEERDA

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 5

Abgabe bis 24. November 2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 5.1: *4 Punkte*

Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Gelte für ein $0 < q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q.$$

Zeigen Sie, dass dann die Folge (a_n) eine Nullfolge ist.

b) Gelte für ein $1 < q$ und $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, n \geq n_0 : \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \geq q.$$

Zeigen Sie, dass dann die Folge (b_n) divergiert.

Aufgabe 5.2: (Hinreichendes Kriterium[1] für Häufungspunkte) *4 Punkte*

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ 0 < |x_{n_\varepsilon} - a|\ \wedge\ |x_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon. \qquad (*)$$

a) Beweisen Sie, dass a dann ein Häufungspunkt der reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, d.h. es existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to a$.

b) Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung nicht gilt. D.h. geben Sie eine Folge an, die einen Häufungspunkt hat, aber für die die oben angegebene Eigenschaft $(*)$ nicht gilt.

c) Formulieren Sie die Negation der obigen Eigenschaft $(*)$ und damit eine notwendige Bedingung[2] dafür, dass ein Punkt *kein* Häufungspunkt einer gegebenen Folge ist.

Aufgabe 5.3: *4 Punkte*

Beweisen Sie, dass für eine beschränkte Folge die Menge der Häufungspunkte ebenfalls beschränkt ist.

---

[1]Ein Kriterium H heißt hinreichend für eine Eigenschaft E, falls gilt: $H \to E$.
[2]Eine Bedingung N heißt notwendig für eine Eigenschaft F, falls gilt: $F \to N$.

Aufgabe 5.4: (Limes superior und Limes inferior) *4 Punkte*

Beweisen Sie für beschränkte Folgen (x_n) und (y_n) mit $x_n \geq 0$ sowie $y_n \geq 0$:

(i) $\limsup_{n\to\infty}(x_n - y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n - \liminf_{n\to\infty} y_n$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$.

Aufgabe 5.5: *4 Punkte*

Bestimmen Sie für die nachfolgend angegebenen Folgen (x_n)

(i) Limes superior und Limes inferior

sowie für die Menge der Folgenelemente $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(ii) Supremum und Infimum sowie

(iii) Maximum und Minimum,

sofern diese Größen existieren.

a) $x_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$;

b) $x_n := n(1 + (-1)^n)$.