HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. J. HEERDA

# Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
# Serie 6

Abgabe bis 01. Dezember 2008 (vor der Vorlesung)

---

**Aufgabe 6.1:** (Cauchy-Kriterium) *4 Punkte*

Zeigen Sie, ohne Benutzung des Supremumaxioms V aber mit Hilfe von Archimedes, dass aus der Konvergenz beliebiger Cauchyfolgen die Konvergenz von monotonen beschränkten Folgen folgt.

**Aufgabe 6.2:** *4 Punkte*

Sei $(x_n)$ eine reelle Folge, so dass für Konstanten $0 \leq q < 1$ sowie $c > 0$ gilt

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : \ |x_{n+1} - x_n| \leq c \cdot q^n.$$

Zeigen Sie, dass dann $(x_n)$ konvergent ist.

**Aufgabe 6.3:** *4 Punkte*

Zeigen Sie, dass es zu jeder reellen Zahl $x$ mit $0 < x < 1$ eine Folge natürlicher Zahlen $1 < n_1 < n_2 < \cdots$ gibt, so dass gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = x.$$

**Aufgabe 6.4:** *4 Punkte*

Sei $(a_k)$ eine reelle Folge mit $0 \leq a_k \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass dann

$$x_n := \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

b) Zeigen Sie nun, dass für $a_k = \frac{1}{(k+1)^2}$ die Folge $(x_n)$ gegen ein $0 < x \leq 1$ konvergiert. Dazu können Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2$ verwenden.

**Aufgabe 6.5:** (Konvergenz und Divergenz von Reihen) *4 Punkte*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz bzw. Divergenz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{3^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2+n+1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+3\,(-1)^n)^n}$