

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 7

Abgabe bis 08. Dezember 2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 7.1: (Abelsche partielle Summation)

4 Punkte

Sei n eine beliebige natürliche Zahl und für $1 \leq k \leq n$ seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Weiter definieren wir $s_m := \sum_{k=1}^m a_k$ für $1 \leq m \leq n$. Zeigen Sie, dass nun für jedes $n \geq 2$ die folgende Formel von Abel gilt:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1})$$

Aufgabe 7.2:

4 Punkte

Beweisen Sie für beliebige Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

(ii) Für jede beschränkte Folge (b_n) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$.

Aufgabe 7.3:

4 Punkte

Sei (b_k) eine monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei konvergent.

Beweisen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert.

Aufgabe 7.4: (g -adische Brüche)

4 Punkte

Entwickeln Sie $x = \frac{1}{9}$ sowohl als 10-adischen als auch als 2-adischen (dyadischen) Bruch.

Aufgabe 7.5:

4 Punkte

Es soll eine Brücke zwischen zwei exakt ebenen Ufern gleicher Höhe errichtet werden. Dazu stehen $2n$ Backsteine identischer Form, aber kein Mörtel o.ä. zur Verfügung. Jeder Backstein ist zwei Dezimeter lang und wiegt ein Kilogramm. Außerdem seien die Backsteine homogen, so dass ihr Schwerpunkt mit ihrem Massemittelpunkt übereinstimmt und jeweils in der Mitte des Steins liegt. Schließlich seien die Steine als völlig unelastisch vorausgesetzt, d.h. es gibt keinerlei Biegung oder Stauchung.

- a) Wie groß ist die mit den $2n$ Backsteinen maximal erreichbare Spannweite s_n , wenn keine Reibung oder sonstige Oberflächeneffekte ausgenutzt werden? Wie sieht $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ aus? Interpretieren Sie das Ergebnis!
- b) Was ändert sich, wenn die Brücke (außer sich selbst) noch an einer beliebigen Stelle eine Last von m Kilogramm tragen können soll?

Hinweis: Betrachten Sie den folgenden Konstruktionsansatz:

