Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 8

Abgabe bis 15. Dezember 2008 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 8.1: (Cauchy-Produkt) *4 Punkte*

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$$

sowie das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst auf Konvergenz.

Aufgabe 8.2: *4 Punkte*

Die Funktionen Sinus (sin) und Cosinus (cos) sind durch folgende Potenzreihen definiert:

$$\sin x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{bzw.} \quad \cos x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}.$$

Zeigen Sie nur unter Verwendung dieser Definitionen, dass gilt:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

(*Hinweis: Dabei kann die – dann ebenfalls zu beweisende – Gleichung:* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n}$ *hilfreich sein.*)

Aufgabe 8.3: (Potenzreihen im Reellen) *4 Punkte*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten in den Randpunkten der Konvergenzintervalle:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k;$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k} \cdot x^k.$

Aufgabe 8.4: *4 Punkte*

Untersuchen Sie für welche $p \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe $P(x)$ mit der Eigenschaft:

$$P\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^p \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

existiert.

Aufgabe 8.5: (Stetigkeit von Funktionen) *4 Punkte*

a) Zeigen Sie, dass durch die folgende Vorschrift eine Funktion definiert wird:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

b) Untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit im Punkt $x_0 = 0$.