HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DIPL.-MATH. J. HEERDA

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 9

Abgabe bis 05. Januar 2009 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 9.1: (Stetigkeit) *2 Punkte*

Zeigen Sie, dass alle positiv homogenen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. solche mit der Eigenschaft

$$f(tx) = t \cdot f(x) \quad \forall\, t > 0\, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

stetig sind.
(*Hinweis: Man betrachte die Fälle* $x = -1, 0, 1$.)

Aufgabe 9.2: *2 Punkte*

Seien f und g stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ stetig sind, wobei

$$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x)) \quad \text{bzw.} \quad \min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x)).$$

Aufgabe 9.3: (Stetigkeitsuntersuchung) *4 Punkte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich:

a) $f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ für $x \in \mathbb{R}$;

b) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f := \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } x = 1. \end{cases}$

Aufgabe 9.4: (Hebbare Unstetigkeitsstellen) *2 Punkte*

Man bestimme die Konstanten α, β sowie $f(-1), f(1)$ derart, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & \text{für } x < -1 \\ (\alpha + \beta)x, & \text{für } -1 < x < 1 \\ x^2 + \alpha x - \beta, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf der ganzen reellen Achse stetig wird.

Aufgabe 9.5: (Untersuchung auf gleichmäßige Stetigkeit) *4 Punkte*

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$ auf gleichmäßige Stetigkeit auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9.6: (Äquivalente Definition der gleichmäßigen Stetigkeit) *4 Punkte*

Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) f ist gleichmäßig stetig auf D.

(2) Für alle Folgen (x_n), (y_n) aus D mit $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

Aufgabe 9.7: (Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit) *2 Punkte*

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf D. Zeigen Sie, dass f dann auch gleichmäßig stetig auf D ist.

Extra-Aufgabe 9.8: (Weihnachtsaufgabe) *4 Zusatzpunkte (falls komplett richtig gelöst)*

Beweisen Sie folgende Aussage: Es gibt zwei Punkte auf dem Äquator, die die gleiche Temperatur haben.
(*Hinweis: Geben Sie die mathematische Formulierung des Problems an: Definieren Sie auf einem geeigneten Definitionsbereich (Intervall) die Temperaturfunktion mit geeigneten Eigenschaften (Periodizität). Dabei können Sie annehmen, dass die Temperaturfunktion eine stetige Funktion ist.*)

WIR WÜNSCHEN FROHE FEIERTAGE UND EINEN GUTEN RUTSCH NACH 2009.