Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 10

Abgabe bis 12. Januar 2009 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 10.1: (Äquivalente Charakterisierung offener Mengen) *4 Punkte*

In der Vorlesung wurden offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ als Komplemente abgeschlossener Mengen definiert. Zeigen Sie, dass gilt:

$$U \text{ ist offen} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in U\ \exists\, \rho > 0 : B_\rho(x) \subset U,$$

wobei $B_\rho(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq \rho\}$.

Aufgabe 10.2: *4 Punkte*

a) Beweisen Sie induktiv, dass der Schnitt endlich vieler offener Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, ebenfalls offen ist.

b) Geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass der Schnitt abzählbar unendlich vieler offener Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i \in \mathbb{N} : x \in U_i\}$, nicht offen sein muss.

Aufgabe 10.3: (Topologische Charakterisierung stetiger reeller Funktionen) *4 Punkte*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(2) Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y \in U : f(x) = y\}$ eine offene Menge.

(3) Für jede abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(F) := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, y \in F : f(x) = y\}$ eine abgeschlossene Menge.

Aufgabe 10.4: *4 Punkte*

Seien $K \subset \mathbb{R}$ kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt) und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig auf K. Beweisen Sie, dass dann $f(K) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in K : f(x) = y\}$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 10.5: *4 Punkte*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{f}(a,b) := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

eine stetige Funktion von $D := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$ nach $\mathbb{R}$ ist.

Extra-Aufgabe 10.6: *4 Zusatzpunkte*

Seien wie oben $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$ und $D := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$. Sei außerdem

$$\operatorname*{argmax}_f(a,b) := \{x \in [a,b] \mid \forall y \in [a,b] : f(x) \geq f(y)\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mu_f : D \to \mathbb{R}, \text{ gegeben durch } \mu_f(a,b) = \min \operatorname{argmax}_f(a,b),$$

nicht stetig sein muss.

Extra-Aufgabe 10.7: *4 Zusatzpunkte*

Man finde eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \to \{0,1\}$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.