Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 11

Abgabe bis 19. Januar 2009 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 11.1: (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) *4 Punkte*

Zeigen Sie, dass eine Funktionenfolge (f_n) auf einer kompakten Menge $D \subset \mathbb{R}^d$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq n_\varepsilon : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

(*Erinnerung: Es ist* $\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$ *für* $f : D \to \mathbb{R}$.)

Aufgabe 11.2: (Gleichmäßige Stetigkeit vs. gleichmäßige Konvergenz) *4 Punkte*

Seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}$.

a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen f_n gleichmäßig stetig sind.

(*Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass die* f_n *gleichmäßig stetig auf* $[-2, 2]$ *sowie auf* $]-\infty, -1]$ *und* $[1, \infty[$ *sind.*)

b) Untersuchen Sie auf welchen abgeschlossenen Intervallen – also der Form $[a, b]$ bzw. $[a, \infty[$ oder $]-\infty, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ – die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 11.3: (Exponentialfunktion) *4 Punkte*

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(*Dies ist die Aussage von Satz 15.2 (iv), die sich durch Verallgemeinerung des Beweises von 15.2 (iii) ergibt.*)

Aufgabe 11.4: (Fehlerabschätzung) *4 Punkte*

a) Untersuchen Sie, wieviele Terme der Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ benötigt werden, um den Wert von $\exp(2)$ mit einer absoluten Genauigkeit von 3 Stellen zu erhalten? D.h. bestimmen Sie ab welchem $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \exp(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \right| \leq 5 \cdot 10^{-4}$$

gilt.

b) Hat es Vorteile bezüglich der Zahl der auszuführenden Multiplikationen und Additionen anstatt von exp(2) nur exp(1) zu berechnen und das Ergebnis dann zu quadrieren?

Dabei wird – nachdem die Anzahl n der nötigen Terme bestimmt wurde – ein Horner-Schema zur Berechnung der entsprechenden n-ten Partialsumme genutzt, d.h. man verwendet

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \left(\cdots \left(\left(\left(\frac{x}{n} + 1 \right) \frac{x}{n-1} + 1 \right) \frac{x}{n-2} + 1 \right) \cdots \right) \frac{x}{1} + 1.$$

Aufgabe 11.5: (Lösung der Wärmeleitungsgleichung) *4 Punkte*

Für festes $t \geq 0$ betrachten wir die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\big((2k-1)\,\pi\,x\big)}{2k-1}\; e^{-(2k-1)^2\,t}$$

auf dem Definitionsbereich $D = [-1, 1]$.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe für alle $t > 0$ gleichmäßig konvergent ist.

(*Hinweis:* $e^{-(2k-1)^2 t} < (1/e^{8t})^{k-1}$.)

b) Weisen Sie für $t = 0$ die punktweise Konvergenz gegen ein $f(x)$ für alle $x \in D$ nach.

(*Hinweis: Wenden Sie unter Verwendung von*

$$\sin(\pi\,x) \cdot \sin\big((2k-1)\,\pi\,x\big) = \sin^2\big(k\,\pi\,x\big) - \sin^2\big((k-1)\,\pi\,x\big)$$

das Teleskop-Prinzip auf die Partialsummen an.)

Extra-Aufgabe 11.6: *4 Zusatzpunkte*

Zeige, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass die eben definierte Funktion f die Bedingung

$$\liminf_{0<x\to 0} f(x) \geq c \quad \text{und entsprechend} \quad \limsup_{0>x\to 0} f(x) \leq -c$$

erfüllt, so dass f an der Stelle $x = 0$ unstetig ist.

(*Hinweis: Für* $|y| \leq \frac{1}{2}$ *gilt:* $\min(1, \pi\,|y|) \geq |\sin(\pi\,y)| \geq 2\,|y|$.)