Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
Serie 12

Abgabe bis 26. Januar 2009 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 12.1: *4 Punkte*

Beweisen Sie mit Hilfe der entsprechenden Reihenentwicklung:

$$\cos(3) < 0.$$

Aufgabe 12.2: *4 Punkte*

Leiten Sie aus den in der Vorlesung bewiesenen Aussagen über $\exp(x)$ und $\log(x)$ die folgenden Verallgemeinerungen her:

(i) $\log_a a^x = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(ii) $a^{\log_a x} = x \qquad \forall\, 0 < x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{log_a x}{x-1} = \frac{1}{\log a}.$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$

Aufgabe 12.3: *4 Punkte+2 Zusatzpunkte*

Welche der folgenden Aussagen ist für stetige reelle Funktionen f, g richtig? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) f ist differenzierbar, falls $h(x) = \sin(f(x))$ differenzierbar ist.

b) f ist differenzierbar, falls $h(x) = e^{f(x)}$ differenzierbar ist.

c) Sei f bijektiv mit $f(0) = y$ und $f'(0) = 0$. Dann ist f^{-1} nicht differenzierbar in y.

d) Sind f und g differenzierbar, so gilt dies auch für ihr punktweises Maximum $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

e) (*Zusatzaufgabe*) Sind f und g beidseitig richtungsdifferenzierbar, so gilt dies auch für ihr punktweises Maximum $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

Aufgabe 12.4: *4 Punkte*

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad x \geq 0.$

b) $f(x) := \left(\sqrt{1 + x^2}\right)^{1+x^2}.$

Aufgabe 12.5: *4 Punkte*

a) Prüfen Sie die folgenden reellen Funktionen f_k $(k = 1, 2, 3)$ auf Stetigkeit sowie Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$:

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

b) Sei $a = \frac{1}{n \cdot \pi}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die minimale Lipschitzkonstante von f_1 auf $[a, \infty[$. Existieren auch für f_2 oder f_3 auf $[a, \infty[$ Lipschitzkonstanten?

Extra-Aufgabe 12.6: *4 Zusatzpunkte*

Finden Sie eine Lipschitzstetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht in jedem Punkt richtungsdifferenzierbar ist.