**Humboldt-Universität zu Berlin**
**Institut für Mathematik**
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

# Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 08/09)
## Serie 13

Abgabe bis 02. Februar 2009 (vor der Vorlesung)

---

**Aufgabe 13.1:** *4 Punkte*

Untersuchen Sie, ob die differenzierbare Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

auf dem Intervall $[-1, 1]$ Lipschitzstetig ist.

**Aufgabe 13.2:** (Ableitung der Umkehrfunktion) *2 Punkte*

Beweisen Sie nur mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass für alle $f_n(x) := x^{\frac{1}{n}}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$f_n'(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

**Aufgabe 13.3:** *4 Punkte*

Untersuchen Sie für welche $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_c(x) = (1 + c\sin(x))x$$

(schwach) monoton bzw. streng monoton ist.

**Aufgabe 13.4:** *4 Punkte*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ einseitig differenzierbar in $a$ bzw. $b$. Zeigen Sie, dass gilt:

Wenn $f'_+(a) < 0$ bzw. $f'_-(b) > 0$, so ist $f$ in $a$ bzw. $b$ lokal maximal.

**Aufgabe 13.5:** *4 Punkte*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese ggf.:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+1)\log(x+1)-x}{e^x-x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-\sqrt{1+|x|}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^x}{a^x-1}$ für $a > 0$, $a \neq 1$

d) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{(x-\frac{\pi}{2})}$

**Aufgabe 13.6:** (Leibniz-Regel) *2 Punkte*

Bestimmen Sie $(x \sin x)^{(4)}$ mit Hilfe der Leibniz-Regel.

**Extra-Aufgabe 13.7:** *4 Zusatzpunkte*

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ unendlich oft differenzierbar ist und $f^{(n)}(0) = 0$ gilt.