Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dipl.-Math. J. Heerda

Übungsklausur zur Analysis I* (WS 08/09)

Aufgabe 1: (Reihen) *5 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^3 - 4n^2 + 4}{2n^5 - 1}$$
konvergent ist.

Aufgabe 2: (Potenzreihen) *5 Punkte*

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} x^k$$
für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3: (Stetigkeit) *5 Punkte*

Zeigen Sie unter Anwendung des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ genau eine reelle Nullstelle hat. (Diese Nullstelle muss nicht ausgerechnet werden.)

Aufgabe 4: (Gleichmäßige Stetigkeit) *5 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sqrt{1+x}$ gleichmäßig stetig auf ihrem Definitionsbereich ist.

Aufgabe 5: (Funktionenfolgen) *5 Punkte*

Seien Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch $f_n(x) := \frac{|x|^n}{1+|x|^n}$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge (f_n) punktweise, aber nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 6: (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung) *5 Punkte*

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstant. Zeigen Sie, dass die Gleichung $7ax^6 - 4bx^3 + 2cx = a - b + c$ mindestens eine Lösung im Intervall $(0, 1)$ hat.

Aufgabe 7: (Grenzwerte von Funktionen) *5 Punkte*

a) $\lim\limits_{x \searrow 0} (x^x)^x$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\log x}$

Bitte wenden!

Aufgabe 8: (Taylorreihe) *5 Punkte*

Sei $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \log(\cos x)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades $T_2(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für alle $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ gilt:

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{2}{3}\, x^3.$$

Aufgabe 9: (Riemannsche Summen) *5 Punkte*

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

und berechnen Sie dann mittels Riemannscher Summen(!) für beliebige $r \in \mathbb{R}$

$$\int_0^r x^2 \, dx.$$