



**Übungsaufgaben zur Analysis IIIa (WS 09/10)**  
**Serie 14**

Diskussion ab Mo., 8. Februar 2010 vor der Vorlesung

---

**Aufgabe 14.1:**

4 Punkte

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, also ganz, mit beschränktem Imaginärteil,  $|\operatorname{Im}(f(z))| \leq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass dann schon  $f$  konstant sein muss.

**Aufgabe 14.2:**

Punkte

Seien  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität  $z_0 \in G$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a)  $z_0$  ist keine hebbare Singularität von  $f$  genau dann wenn  $z_0$  eine wesentliche Singularität von  $\sin(f(z))$  ist.
- (b) Der Typ der Singularität  $z_0$  von  $f$  und der Ableitung  $f'$  ist derselbe.

**Aufgabe 14.3:**

Punkte

Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklungen um  $z_0 = 1$  für  $0 < |z - 1| < 1$ , d.h. im Kreisring  $A_0^1(1)$ , von

$$(a) \frac{z^4}{(1-z)^2}, \quad (b) \frac{z^4}{1-z^2}, \quad (c) \frac{1}{(\ln z)^2},$$

in (c) ist der Hauptzweig des Logarithmus zu verwenden.

**Aufgabe 14.4:**

Punkte

Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{5z^{63}}{16z^{64} - 4z^{41} + 2z^4 - 3} dz$$

Prüfen Sie dazu, dass alle Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen müssen und bestimmen Sie die Laurentreihe per Inversion von Potenzreihen.

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 14.5:***Punkte*

- (a) Zeigen Sie, dass das Polynom  $p(z) = z^2 - 2z + 2$  auf  $\Omega = \mathbb{C} \setminus T$ , wobei  $T = \{1 + it : |t| \leq 1\}$  die Strecke zwischen  $1 + i$  und  $1 - i$  ist, eine holomorphe Quadratwurzel besitzt, d.h., dass es eine holomorphe Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $f(z)^2 = (-f(z))^2 = p(z)$ . Dabei sei  $f$  so gewählt, dass  $f(0) = \sqrt{2}$ .

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass  $\ln(p(z))$  auf  $\Omega$  eindeutig definiert werden kann.

- (b) Bestimmen Sie die auf  $B_1(0)$  gültige Reihenentwicklung von  $f$  und geben Sie deren Konvergenzradius an.
- (c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von  $f$  auf  $A = \{z : |z| > \sqrt{2}\}$  und  $B = \{z : |z - 1| > 1\}$ .