HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

# Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
# Serie 2

Abgabe bis 8. November 2010 (vor der Vorlesung)

---

**Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.**

**Aufgabe 2.1:** *10 Punkte*

a) Seien $I, J$ beliebige Mengen, die als Indexmengen der Mengenfamilien $\{A_i : i \in I\}$ und $\{B_j : j \in J\}$ von Teilmengen $A_i$, $B_j \subset X$ einer Obermenge $X$ verwendet werden. Vereinigung und Durchschnitt über solche Familien sind dann definiert als

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I : x \in A_i\} \quad \text{und} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$$

Beweisen Sie das Distributivgesetz:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i \cap B_j)\,.$$

b) Sei $F : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subset X$ Teilmengen. Dann gilt folgendes Gesetz für die Bildmengenfunktion:

$$F(A) \cup F(B) = F(A \cup B).$$

Beweisen Sie dieses und finden Sie ein Gegenbeispiel für das Umstellen dieser Formel mittels Mengendifferenz, d.h. widerlegen Sie

$$F(A) = F(A \cup B) \setminus F(B)$$

**Aufgabe 2.2:** *10 Punkte*

Es seien $A$, $B$, $C$, $D$ Mengen, $f$ eine Abbildung von $A$ nach $B$, $g$ eine Abbildung von $B$ nach $C$ und $h$ eine Abbildung von $C$ nach $D$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Zeigen Sie: Sind die Verknüpfungen $g \circ f$ und $h \circ g$ bijektiv, so sind schon $f$, $g$, $h$ sämtlich bijektiv.

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 2.3:** *10 Punkte*

Auf den natürlichen Zahlen mit Null $(\mathbb{N}_0, 0, S)$ und Nachfolgerfunktion $S$ ist die Addition $A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert als $A(m, 0) = m$ und $A(m, S(n)) = S(A(m, n))$. Zeigen Sie, dass die Addition kommutativ ist. Der Beweis erfolgt in drei Teilschritten, die jeweils Rekursionsbeweise der Aussagen $\forall n \in \mathbb{N}_0 : K_j(n)$, $j = 1, 2, 3$ sind:

(a) $K_1(n) \overset{Df}{\iff} A(m, S(n)) = A(S(m), n)$ für beliebig fixiertes $m \in \mathbb{N}_0$;

(b) $K_2(n) \overset{Df}{\iff} A(0, n) = A(n, 0)$;

(c) $K_3(n) \overset{Df}{\iff} A(m, n) = A(n, m)$ für beliebig fixiertes $m \in \mathbb{N}_0$.

**Aufgabe 2.4:** *10 Punkte*

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

a) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

b) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer $n$-elementigen Menge $A$ hat genau $2^n$ Elemente.
Wieviele Elemente hat die fünffach iterierte Potenzmenge der leeren Menge

$$\mathcal{P}^5(\emptyset) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))))?$$