Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dr. Holger Heitsch, Dr. Jörn Müller

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 4

Abgabe bis 22. November 2010 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 4.1: (Eulersche Zahl e) *10 Punkte*

Es werden die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $b_k := \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ betrachtet. Beweisen Sie für diese die folgenden Ungleichungen:

a) $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen $m < n$ mittels Bernoulli-Ungleichung (zuerst für $n = m+1$), d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend;

b) $\displaystyle\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \leq \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} r^m$ für $r > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mittels binomischer Formel;

c) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} r^m \leq 1 + r \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{r}{2}\right)^m$ für $r > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

d) $\displaystyle 1 + r\sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{r}{2}\right)^m \leq 1 + r\,\frac{1-(r/2)^n}{1-(r/2)} \leq 1 + \frac{2r}{2-r}$ für $0 < r < 2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mittels Summenformel der geometrischen Summe bzw. per vollständiger Induktion

Benutzen Sie diese Ungleichungen, um die Ungleichungskette

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} \leq \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^k.$$

für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ und $k > 1$ zu beweisen.
Bemerkung: Dies bedeutet, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch jedes Glied b_k , $k \geq 1$, der Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. Weiter kann gezeigt werden, dass die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fällt und die Differenz $b_n - a_n$ beliebig klein wird, d.h. beide Folgen konvergieren und $lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} b_k =: e$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4.2: **(Suprema etc.)** *10 Punkte*

a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere nach oben beschränkte Mengen. Zeigen Sie:

   (i) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

   (ii) Falls $A \cap B \neq \emptyset$, so $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

   (iii) Zeigen Sie, dass $\sup(A \cap B)$ nicht als eine Funktion von $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ und $\inf B$ darstellen lässt. (Es kann ein Gegenbeispiel mit endlichen Mengen angegeben werden.)

b) Finden Sie (bzw. zeigen Sie die Nichtexistenz von) sup, inf, max, min der folgenden Mengen rationaler Zahlen:

   (i) $\left\{ \dfrac{n}{8^m} : \ m, n \in \mathbb{N}, \ n > m \right\}$,

   (ii) $\left\{ \dfrac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{N}, \ p^3 < 2q^3 \right\}$.

Aufgabe 4.3: **(Aussagen zur Konvergenz)** *10 Punkte*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

b) Jede Folge reeller Zahlen enthält eine monotone (wachsende oder fallende) Teilfolge. (Hinweis siehe Vorlesung, *Spitzen* der Folge.)

c) Jede monoton wachsende bzw. fallende Folge, die nicht konvergiert, divergiert bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$.

Aufgabe 4.4: **(Nullfolgen)** *10 Punkte*

Beweisen Sie bzw. widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

(i) $|x_n^2 + 2x_{n+1}| < \varepsilon$;

(ii) $|x_n| < n\varepsilon$;

(iii) $|x_n| < \varepsilon^2 + \varepsilon + 3\sqrt{\varepsilon}$;

(iv) $|x_{n+1}| < \varepsilon |x_n|$.