**Humboldt-Universität zu Berlin**
**Institut für Mathematik**
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dr. Holger Heitsch, Dr. Jörn Müller

# Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
## Serie 6

Abgabe bis 6. Dezember 2010 (vor der Vorlesung)

---

**Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.**

**Aufgabe 6.1: (Schachtellemma)** *10 Punkte*

a) Zeigen Sie, dass für positive reelle Zahlen $a, b, c$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max(a, b, c)$$

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^n} = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m|\,.$$

**Aufgabe 6.2: (Häufungspunkte)** *10 Punkte*

a) (Hinreichendes Kriterium[1] für Häufungspunkte) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$(*) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ 0 < |x_{n_\varepsilon} - a| \ \wedge\ |x_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon.$$

i) Beweisen Sie, dass $a$ dann ein Häufungspunkt der reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, d.h. es existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to a$.

ii) Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung nicht gilt. D.h. geben Sie eine Folge an, die einen Häufungspunkt hat, aber für die die oben angegebene Eigenschaft $(*)$ nicht gilt.

iii) Formulieren Sie die Negation der obigen Eigenschaft $(*)$ und damit eine notwendige Bedingung[2] dafür, dass ein Punkt *kein* Häufungspunkt einer gegebenen Folge ist.

b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge:

$$2 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} + (-1)^n$$

**Bitte wenden.**

[1] Ein Kriterium $H$ heißt hinreichend für eine Eigenschaft $E$, falls gilt: $H \to E$.
[2] Eine Bedingung $N$ heißt notwendig für eine Eigenschaft $F$, falls gilt: $F \to N$.

**Aufgabe 6.3:** **(Limes superior und Limes inferior)** *10 Punkte*

a) (Lemma 9.5) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass wenn $a = \limsup_{n\to\infty} x_n$ als das Supremum aller Häufungspunkte der Folge definiert ist, dann für jedes $\varepsilon > 0$

   i) $x_n > a + \varepsilon$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und

   ii) $x_n > a - \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Bestimmen Sie für die nachfolgend angegebenen Folgen $(x_n)$,

   i) $x_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$;

   ii) $x_n := n(1 + (-1)^n)$;

   1.) Limes superior und Limes inferior

   sowie für die Menge der Folgenelemente $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

   2.) Supremum und Infimum sowie

   3.) Maximum und Minimum,

   sofern diese Größen existieren.

**Aufgabe 6.4:** **(Cauchy–Folgen und Vervollständigung von $\mathbb{Q}$)** *10 Punkte*

Es sei mit $CF(\mathbb{Q})$ die Menge aller rationalen Cauchy-Folgen bezeichnet. Auf dieser Menge sei eine Äquivalenzrelation definiert als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Es bezeichne $\mathcal{R} = CF(\mathbb{Q})/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, d.h. zu jedem $x \in \mathcal{R}$ gibt es eine Repräsentantenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{Q})$ mit

$$x = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = \Big\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in CF(\mathbb{Q}) :\ (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}\Big\}.$$

Zeigen Sie:

a) Die gliedweise Addition und Multiplikation auf $CF(\mathbb{Q})$ lassen sich zu Operationen auf $\mathcal{R}$ fortsetzen, d.h. sind von der Wahl des Repräsentanten unabhängig.

b) Addition und Multiplikation auf $\mathcal{R}$ wie eben definiert erfüllen das Distributivgesetz.

c) Die Einbettung der rationalen Zahlen durch die konstanten Folgen, $\iota : \mathbb{Q} \to \mathcal{R}$, $\iota(q) = [(q)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$, ist injektiv.

*Bemerkung* Um zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ ein Modell für bzw. eine Konstruktion von $\mathbb{R}$ ist, müsste man noch die Ordnung und den Betrag von $\mathbb{Q}$ auf $\mathcal{R}$ übertragen, zeigen, dass dann jede Cauchy-Folge in $\mathcal{R}$ konvergiert bzw. jede beschränkte Menge in $\mathcal{R}$ ein Supremum besitzt.
Danach ist dann z.B. $\sqrt{2}$ als Äquivalenzklasse der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ definiert.