Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. PhD. A. Griewank
Dr. L. Lehmann; Dr. Holger Heitsch, Dr. Jörn Müller

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 7

Abgabe bis 13. Dezember 2010 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 7.1: (Teleskopreihen) *10 Punkte*

a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Inkremente $a_n = x_{n+1} - x_n$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n - x_1$.

b) Benutzen Sie das Prinzip der Teleskopreihe, um die Werte folgender Reihen zu bestimmen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$;

Aufgabe 7.2: () *10 Punkte*

a) Zur Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ betrachtet man die Größen $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $q = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Zeigen Sie, dass allgemein $r \le q$ gilt, und Gleichheit aus der Existenz des Grenzwertes der Quotientenfolge folgt, d.h. wenn $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, dann ist $r = q$.

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass für Konstanten $0 \le q < 1$ sowie $c > 0$ gilt

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge n_0 :\ |x_{n+1} - x_n| \le c \cdot q^n.$$

Zeigen Sie, dass dann (x_n) konvergent ist.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{-1}$$

für $n \ge 1$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, und gleichzeitig $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 7.3: (Unendliche Produkte) *10 Punkte*

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $0 \leq a_k \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass dann

$$x_n := \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

b) Zeigen Sie nun, dass

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$$

für $a_k = \frac{8}{(k+1)^2}$ konvergiert. Zeigen Sie (mit Hilfe partieller Produkte), dass der Grenzwert nicht Null ist. (Zusatzaufgabe: Finden Sie eine Schranke $r > 0$ und zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht in $[-r, r]$ liegt.)
Dazu können Partialsummen von

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \text{ per } \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-1} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

und den zugehörigen Teleskopreihen abgeschätzt werden.

c) Zeigen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{2k+1}\right) = 0.$$