HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 8

Abgabe bis 3. Januar 2011 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 8.1: (Konvergenz: Vergleichskriterien) *10 Punkte*

a) Seien $S = \sum a_n$ und $T = \sum b_n$ Reihen mit positiven Summanden, die durch die Ungleichung
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$
verbunden sind. Zeigen Sie, dass wenn T konvergiert, auch S konvergiert und umgekehrt, wenn S divergiert, auch T divergiert.

b) Seien $S = \sum a_n$ und $T = \sum b_n$ Reihen mit positiven Summanden, die durch
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$
verbunden sind. Zeigen Sie, dass wenn $c > 0$ die Konvergenz von S zur Konvergenz von T äquivalent ist. Was kann für $c = 0$ noch ausgesagt werden?

Aufgabe 8.2: (bedingte und absolute Konvergenz) *10 Punkte*

Welche der folgenden Reihen konvergieren absolut und welche nur bedingt? Begründen Sie Ihr Ergebnis!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n}{2^n+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+3}{7n^2-2n+1}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n^2+(-1)^n n}{n^3+1}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n+1}{3^n-2^n}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

Aufgabe 8.3: (Cauchy-Produkt) *10 Punkte*

Die (von Newton erstmals in Europa aufgeschriebene) Binomialreihe zum Index $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe
$$B_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n .$$
Mittels Quotientenkriterium überzeugt man sich leicht, dass der Konvergenzradius 1 ist. Zu untersuchen ist das Cauchyprodukt zweier Binomialreihen.

Bitte wenden.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Identität der Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei kann $\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot \binom{\alpha}{k}$ im Induktionsschritt mehrfach zur Anwendung gebracht werden.

b) Verwenden Sie diese Identität, um für das Cauchy-Produkt der Binomialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\beta}{\ell} x^\ell = B_\alpha(x) \cdot B_\beta(x) = B_{\alpha+\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ zu zeigen. Schließen Sie daraus, dass wenigstens für alle rationalen $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gilt

$$B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha .$$

Aufgabe 8.4: (Verpackungsprobleme) *10 Punkte*

a) Swantje bekommt auch dieses Weihnachten wieder sehr viele Geschenke, nämlich abzählbar unendlich viele. Die Pakete, die alle würfelförmig sind, stellt Swantje mit dem Größten, das einen Meter hoch ist, beginnend nach Größe geordnet in einer Reihe unter dem Tannenbaum auf.

Sie stellt dabei fest, dass jedes Paket jeweils ein Drittel so breit wie das vorherige ist. Wie weit müssen die Äste des Tannenbaums mindestens ragen, wenn alle Pakete unterm Baum Platz finden?

Beim Auspacken stellt Swantje fest, dass sie beim nachfolgenden Paket immer nur jeweils die Hälfte der Zeit braucht. Wie lange hat Swantje für das erste Paket gebraucht, wenn sie, neugierig wie sie ist, schon nach 2 Minuten alles ausgepackt hat?

b) Heini bekommt zu Weihnachten von seinem Patenonkel, der unter Heinis Streichen viel leiden musste, einen Würfel von einem Kubikmeter Größe geschenkt. Heini braucht zum Auspacken eine Minute, und im Allgemeinen hängt die Zeit, die Heini zum Auspacken braucht, proportional von der Oberfläche des Päckchens ab.

Als er das Paket geöffnet hat, ist in dem Karton wieder ein eingepackter Würfel und $\frac{7}{8}\,\mathrm{m}^3$ Luft. Und so geht es weiter. Nach dem n–ten Auspacken findet Heini wieder ein würfelförmiges Päckchen und $\dfrac{3n^2+3n+1}{n^3\cdot(n+1)^3}\,\mathrm{m}^3$ gähnende Leere. Heini versucht, die leeren Kartons aufeinander zu stapeln. Gelingt ihm das?

Zudem machen die Eltern sich Sorgen, ob Heini denn rechtzeitig zum Abendspaziergang zum Onkel mit dem Auspacken fertig sein wird. Packt Heini noch an Neujahr aus? Und warum ist Heini nachher so enttäuscht, dass er nicht mehr mit zum Onkel will?