HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 9

Abgabe bis 17. Januar 2011 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 9.1: () *10 Punkte*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit den Koeffizienten

a) $a_n = \dfrac{5^n}{n+1}$;

b) $a_n = \dfrac{n^4 - 3n + 6}{n^2 + 2n - 1}$;

c) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$;

d) $a_n = 2^{\binom{2}{n}}$

e) $a_n = \dbinom{2n}{n}$

f) $a_n = \sin(n)$

Aufgabe 9.2: () *10 Punkte*

a) Seien f und g stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ stetig sind, wobei

$$\max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x)) \quad \text{bzw.} \quad \min(f,g)(x) := \min(f(x), g(x)).$$

b) Zeigen Sie, dass alle positiv homogenen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. solche mit der Eigenschaft

$$f(tx) = t \cdot f(x) \quad \forall\, t > 0\, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

stetig sind.

(*Hinweis: Man betrachte die Fälle* $x = -1, 0, 1$.)

c) Bestimmen Sie die Konstanten α, β sowie $f(-1), f(1)$ derart, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & \text{für } x < -1 \\ (\alpha + \beta)x, & \text{für } -1 < x < 1 \\ x^2 + \alpha x - \beta, & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

auf der ganzen reellen Achse stetig wird.

Bitte wenden.

Aufgabe 9.3: (Winkelfunktionen) *10 Punkte*

Die Funktionen Sinus (S) und Cosinus (C) sind durch folgende Potenzreihen definiert:

$$S(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad C(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

a) Zeigen Sie, nur unter Verwendung dieser Definitionen und mit den Cauchy-Produkt, die Gültigkeit eines der zwei Additionstheoreme

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \quad \text{und} \quad S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y).$$

b) Beide Reihen konvergieren nach dem Leibnizkriterium. Finden Sie ein Intervall $[-A, A]$ mit Zentrum Null, in welchem die Folge der Absolutbeträge der (nichtverschwindenden) Summanden vom ersten Glied an monoton fallend ist. Auf diesem Intervall gilt dann

$$S_3(x) \le S(x) \le S_1(x) \quad \text{und} \quad C_2(x) \le C(x) \le C_0(x),$$

wenn S_k und C_k die Partialsummen von S und C bis zum Grad k bezeichnen.

c) Leiten Sie aus vorigem ein Intervall $[-B, B]$ ab, auf dem $C(x) \ge 0$ gilt, und zeigen Sie, dass aus den Additionstheoremen auch

$$S(x) - S(y) = 2\,C\left(\tfrac{x+y}{2}\right) S\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$

folgt. Kombinieren Sie beides zum Beweis der Aussage, dass S auf diesem Intervall monoton wachsend ist.

d) Schätzen Sie $S(1)$ ab und zeigen Sie, dass es im Intervall $(0, 1)$ genau eine Stelle x^* geben muss mit Sinuswert $S(x^*) = \frac{1}{2}$.

Bemerkung: Weiter folgt daraus, dass $1 = C(x - x) = C(x)^2 + S(x)^2$ gilt und $C(3x^*) = 0$, $S(3x^*) = 1$ gilt, woraus man folgert, dass $\pi = 6x^*$. Genauer muss man zu letzterem noch zeigen, dass x die Bogenlänge der Parametrisierung $x \mapsto (C(x), S(x))$ des Einheitskreises ist.