HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 10

Abgabe bis 24. Januar 2011 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 10.1: (Grenzwerte von Funktionen) *10 Punkte*

a) Berechnen Sie für
$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$
die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ für $a = 0$, $a = 1$ bzw. $a = \infty$.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$;

(ii) $\lim_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$;

(iii) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$.

Aufgabe 10.2: (Stetigkeit) *10 Punkte*

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Funktionen im angegebenen Definitionsbereich gleichmäßig stetig bzw. Lipschitz-stetig sind.

a) $f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^3$, $D_f = [0,1]$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_f = [0, +\infty)$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_f = [1,2]$.

Hinweise: 1. gleichmäßige Stetigkeit $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ Lipschitz-Stetigkeit; 2. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Bitte wenden.

Aufgabe 10.3: (Stetigkeit) *10 Punkte*

a) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ und

$$f(x)f(y) \le f(x+y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie: Ist f in $x = 0$ stetig, so ist schon f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

b) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass es dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0,1]$ gibt mit

$$f(x) = f(x + \tfrac{1}{n})$$

c) Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert als

$$g(x) = \max\{f(t) : \ t \in [a,x]\}.$$

Zeigen Sie: g ist stetig, monoton wachsend und eine Majorante von f. Und weiterhin, dass g die kleinste Funktion mit diesen Eigenschaften ist.