HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 11

Abgabe bis 31. Januar 2011 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 11.1: (Trigonometrische Funktionen) *10 Punkte*

a) Verifizieren Sie mittels der Additionstheoreme die Identitäten

(i) $\sin(3z) = 3\sin(z) - 4\sin^3(z)$ und

(ii) $\cos(4z) = 8\cos^4(z) - 8\cos^2(z) + 1$.

b) Zeigen Sie mittels Additionstheoremen (und, falls notwendig, vollständiger Induktion)

$$\frac{1}{2} + \cos(x) + \ldots + \cos(nx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

c) Sinus und Tangens sind beide auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ monoton wachsend und besitzen daher Umkehrfunktionen auf der jeweiligen Bildmenge. Diese werden als Arcus Sinus, $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und als Arcus Tangens, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bezeichnet. (Man spricht auch vom Hauptast unter den möglichen Umkehrfunktionen.)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)?$$

Aufgabe 11.2: (Grenzwerte von Funktionen) *10 Punkte*

a) Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{11} - 2x + 1}{x^7 - 2x + 1}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}$, $m, n \in \mathbb{N}$;

Hinweis: Substitution $x = 1 + y$, binomische Formeln

b) Sei $n := \lfloor x \rfloor$, das größte Ganze von x, diejenige ganze Zahl, für welche $n \le x < n+1$ gilt. Berechnen Sie den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 2-0} \left\lfloor x + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \right\rfloor$$

Bitte wenden.

Aufgabe 11.3: (gleichmäßige Stetigkeit) *10 Punkte*

a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf gleichmäßige Stetigkeit auf $\mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear beschränkt ist, d.h. dass es eine Konstante $C \geq 0$ gibt mit $|f(x)| \leq C(1+|x|)$.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass wenn die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existieren, dann f schon gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 11.4: (Differenzieren) *10 Punkte*

a) Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mit Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq c$:

   a) $\ln\left|\dfrac{ax+b}{cx+d}\right|$, $x \notin \left\{-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}\right\}$;

   b) $\arctan\left(\dfrac{ax+b}{c}\right)$, $x \neq -\frac{b}{a}$.

b) Untersuchen Sie folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und (stetige) Differenzierbarkeit

$$f(x) := \begin{cases} \arctan\left(x + \frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0. \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Bitte wenden.