HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 12

Abgabe bis 7. Februar 2011 (vor der Vorlesung)

Bitte jede Aufgabe auf einem extra Blatt abgeben.

Aufgabe 12.1: (Ableiten) *14 Punkte*

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Rechenregeln des Differenzierens die Ableitungen folgender Funktionen:

(i) $f(x) = \sqrt[3]{2x}$

(ii) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x^4}{4+x^2}}$;

(iii) $f(x) = \ln\left(\ln\left(5^{\cos^3(2x)}\right)\right)$;

(iv) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+2x}{1-3x}\right)$, $x \neq \frac{1}{3}$.

Hinweis: Manchmal erzielt man Vereinfachungen des weiteren Rechnungsverlaufes durch Umformungen vor dem Differenzieren.

b) Die Hyperbelfunktionen Hyperbelsinus und -kosinus sind als der ungerade bzw. gerade Teil der Exponentialfunktion definiert, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ sowie $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

(i) Bestimmen Sie die Potenzreihen dieser Funktionen.

(ii) Zeigen Sie, dass sinh auf ganz $\mathbb{R}$ und cosh auf $\mathbb{R}_+$ monoton wachsend sind.

(iii) Schließen Sie auf die Existenz der Umkehrfunktionen über diesen Bereichen. Die Umkehrfunktionen werden Area-Funktionen genannt, die des Hyperbelsinus wird als $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ notiert.

(iv) Vergleichen Sie die Ableitungen von

$$f(x) = \operatorname{Arsinh}(x) \quad \text{und} \quad g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Welcher Zusammenhang zwischen den Funktionen läßt sich daraus ableiten? Kann dieser auch direkt, also ohne Differenzieren, nachgewiesen werden?

Aufgabe 12.2: (Produkt- oder Leibnizregel) *10 Punkte*

a) Zeigen Sie, dass die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sich systematisch darstellen lassen als

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d^n}{dx^n}\cos(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Bestimmen Sie die 25te Ableitung von $f(x) = x^2 \sin(2x+3)$.

c) Bestimmen Sie die 72te Ableitung von $f(x) = x^3 e^{3x}$.

d) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare stetige Funktionen. Bestimmen Sie, in Punkten mit $g(x) \neq 0$, die ersten drei Ableitungen des Quotienten $h = f/g$. Läßt sich ein einfaches Muster analog zur Leibnizregel des Produktes erkennen?

Bitte wenden.

Aufgabe 12.3: (l'Hôpital) *16 Punkte*

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x - x\cos x}$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 1$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin(a^2x^2)}{\ln\sin(b^2x^2)}$, $a, b > 0$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-2x}(1+2\sin x) + e^{-x^2}\cos^2 x}{e^{-x}(2+\sin x)}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.