HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN; DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Übungsaufgaben zur Analysis I* (WS 10/11)
Serie 13

Nicht abzugeben, aber zur Besprechung in den Übungen vorzubereiten.

Aufgabe 1:

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x > 0$ folgende zweiseitige Abschätzung des Logarithmus richtig ist:

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$$

Kann man diese und ähnliche Abschätzungen des Logarithmus auch elementarer gewinnen?

Aufgabe 2:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar und beschränkt. Zeigen Sie, dass dann f eine Wendestelle, d.h. eine Nullstelle der zweiten Ableitung, haben muss.

Aufgabe 3:

Seien a_k, $k = 1, \dots, N$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\,x)$$

im Intervall $(0, \pi)$ wenigstens eine Nullstelle hat.

Aufgabe 4:

Wie verhält sich die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{1/x}$ in den Randpunkten des Definitionsbereiches für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0$? Welchen maximalen Wert nimmt die Funktion an?

Bitte wenden.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie für $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ Taylorpolynom und Restglied beliebiger n-ter Ordnung im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass die Folge der Restterme für jedes $x \in (-1, 1)$ gegen Null konvergiert.

Aufgabe 6:

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist und die Ableitungen in der Form $f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})f(x)$ mit Polynomen p_n dargestellt werden können. Folgern Sie, dass alle Ableitungen im Nullpunkt verschwinden und damit die Taylorreihe im Nullpunkt nicht gegen die Funktion konvergieren kann.

Aufgabe 7:

(Knobelaufgabe) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreifach stetig differenzierbar mit $f(1) = f'(-1) = 0 = f'(1) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann die dritte Ableitung eine Nullstelle x^* im Intervall $(-1, 1)$ haben muss, $f'''(x^*) = 0$.