HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. PHD. A. GRIEWANK
DR. L. LEHMANN, DR. HOLGER HEITSCH, DR. JÖRN MÜLLER

Probeklausur zur Analysis I* (WS 10/11)

Aufgabe 1: *4 Punkte*

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Summanden $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese genau dann konvergiert, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

konvergiert.

Aufgabe 2: *4 Punkte*

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius von

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+2^{2n}+3^{3n})x^{4n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(5n-6)^n x^{n^2}$

Aufgabe 3: *4 Punkte*

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) := \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}\right).$$

Aufgabe 4: *4 Punkte*

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ mit der l'Hospitalschen Regel.

Bitte wenden.

Aufgabe 5: *6 Punkte*

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Grades im Nullpunkt für die Funktion $f(x) = \ln(\cosh(x))$.

Aufgabe 6: *4 Punkte*

Seien Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2 \sin(x)$, $g(x) := x \sin(x)$. Zeigen Sie, dass dann für deren Integrale gilt

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 7: *6 Punkte*

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und $s_m := \sum_{k=1}^{m} a_k$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass nun für jedes $n \geq 2$ die folgende Formel von Abel gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1})$$

b) Seien nun $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, sowie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Beweisen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert.