Aufgabe 1. Lösung:

a) Alle solchen $\mathcal{A}$ sind von der Form $\{\emptyset, \mathbb{R}, I, \mathbb{R} \setminus I\}$, wobei I ein (offenes oder halboffenes) Intervall von $a \in \mathbb{R}$ bis ∞ ist. D.h. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, oder $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a), [a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}\}$, oder $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a], (a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}\}$.
Begründung: Wenn ein beliebiges nichtleeres beschränktes Interval I in $\mathcal{A}$ enthalten wäre, dann müsste $\mathbb{R} \setminus I \in \mathcal{A}$ gelten, aber dann wäre $\mathbb{R} \setminus I$ nicht zusammenhängend. Deshalb können die in a) gesuchten Algebren nur von der angegebenen Form sein. Dass diese nur aus zusammenhängenden Mengen bestehen (modulo $\emptyset$) ist offensichtlich. Daher sind dies alle Algebren, die in a) gesucht sind.

b) Aus der Übung ist bekannt, dass schon die von $\{(a, \infty)$ für $a \in \mathbb{R}\}$ erzeugte σ-Algebra gerade die Borel-σ-Algebra ist.

Aufgabe 2. Lösung: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $B \notin \mathcal{A}$ eine nicht messbare Menge. Dann ist die Charakteristische Funktion χ_B nicht messbar. Entsprechend ist $-1 + 2\chi_B$ nicht messbar. Da aber $-1 + 2\chi_B$ nur die Werte -1 und $+1$ annimmt, ist das Quadrat $(-1 + 2\chi_B)^2$ konstant 1 und damit messbar.

Aufgabe 3. Lösung: Bezeichne $B := \{x \in X \ : \ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$, dann ist $B = \{x \in X \ : \ \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\}$. Also ist B gerade das Urbild von $\{0\}$ unter der Funktion $g := \limsup_{n\to\infty} f_n - \liminf_{n\to\infty} f_n$. Aus der Übung wissen wir, dass $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ jeweils messbar sind, und dass die Summe (und damit die Differenz) messbarer Funktionen messbar ist. Also ist g messbar, d.h. Urbilder messbarer Mengen sind messbar. Damit folgt die Aussage aus der Beobachtung, dass $\{0\} \in \mathcal{B}$ messbar ist.

Aufgabe 4. Lösung: Man substituiere $u = nx$, dann erhält man

$$I_n(a) = \int_{na}^{\infty} \frac{ue^{-u^2}}{1 + (\frac{u}{n})^2} du.$$

Fallunterschiedung: Fall 1 $a = 0$: Die Folge von Integranten konvergiert gegen $g(u) = ue^{-u^2}$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$ ist eine Majorante. Also gilt nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz ("dominated convergence"):

$$\lim_{n\to\infty} I_n(0) = \int_0^{\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1 + x^2} dx = \int_0^{\infty} ue^{-u^2} du = \frac{1}{2}.$$

Fall 2 $a > 0$:

$$I_n(a) = \int_{na}^{\infty} \frac{ue^{-u^2}}{1 + (\frac{u}{n})^2} du \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{ue^{-u^2}}{1 + (\frac{u}{n})^2} \chi_{[na,\infty)} du.$$

Setzt man nun $f_n(u) := \frac{ue^{-u^2}}{1+(\frac{u}{n})^2} \chi_{[na,\infty)}$ so gilt $f_n \to 0$ und $f_n(u) \leq ue^{u^2}$. Damit gilt nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz ("dominated convergence"):

$$\lim_{n\to\infty} I_n(a) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(u) du = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(u) du = 0.$$

Aufgabe 5. Lösung:

a) Nach Wahl geeigneter Koordinaten, zB Kugelkoordinaten, und der Berechnung der Transformationsformel ergibt sich (im wesentlichen) ein Integral der Form

$$\int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} e^{\arctan\tan\phi} r^2 \sin\ \psi\ d\phi dr d\psi,$$

welches ohne weitere Probleme zu berechnen ist.

b) Man beachte, dass $e^{y\sqrt{y}+2\log x} = x^2 \cdot e^{y\sqrt{y}}$, und berechnet das innere Intergal. Danach verwende man Fubini um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{y^{(1/8)}} \frac{1}{3} z^3 e^{y\sqrt{y}}\ dz dy &= \int_0^1 \frac{1}{12} (y^{(1/8)})^4 e^{y\sqrt{y}}\ dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{12} \sqrt{y} e^{y^{(2/3)}}\ dy \\ &= \frac{1}{12}(e-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Lösung: Man beachte, dass hier das Integral über $\langle \operatorname{grad} f, n\rangle$ berechnet wird, dass (z.B.) c die Vorraussetzungen für den Satz von Gauss erfüllt, und man damit $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ über das Innere intergieren kann. Da nun nach Vorraussetzung $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f = 0$ gilt, verschwindet das Integral.

Aufgabe 7. Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten dies zu lösen. zB kann man die beiden Teile von F integrieren und erhält so die gesuchte Funktion $f(x,y) = y\arctan(x) + xy + \arctan(x) - e^{-y} + c$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$. Andererseits kann man z.B. F zu einem Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ fortsetzen (mit "0"), dann $\operatorname{rot} F$ berechnen, und die Ergebnisse des übungsblattes 13 verwenden.