Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 1

Abgabe am 29.10.2008 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Betrachten Sie den $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Vereinigungen von Multiintervallen einen Ring bildet.

(2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei X eine Menge und sei $R \subset P(X)$ ein Ring im Sinne der Vorlesung. (Hier bezeichnet $P(X)$ die Potenzmenge von X.) Zeigen Sie, dass dann R ein Ring im algebraischen Sinn ist, wenn die Addition und Multiplikation durch $A + B := A \Delta B$ und $A \cdot B := A \cap B$ definiert werden. D.h., es ist zu zeigen,

a) dass die Operationen $+, \cdot$ wohldefiniert sind.

b) dass $(R, +)$ eine kommutative Gruppe ist. (Geben Sie hierzu auch das neutrale und inverse Element zu $A \in R$ an.)

c) dass auf $(R, \cdot)$ Assoziativ- und Kommutativgesetz gelten.

d) dass das folgende Distributivgesetz gilt: Für alle $A, B, C \in R$ gilt

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $X := \{1, 2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie für die folgenden Mengensysteme S jeweils den kleinsten Ring $R(S)$ und die kleinste σ-Algebra $A(S)$, die S enthalten.

a) $S = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$ und

b) $S = \{\{3\}, \{1\}\}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 4.

a) Sei X eine Menge und sei $A := \{B \subset X; B \text{ ist abzählbar oder } X \setminus B \text{ ist abzählbar}\}$. Zeigen Sie, dass A eine σ-Algebra ist.

b) Sei X eine unendliche Menge und sei $A := \{B \subset X; B \text{ ist endlich oder } X \setminus B \text{ ist endlich}\}$. Zeigen Sie, dass A eine Algebra ist, aber keine σ-Algebra.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen alle dieselbe σ-Algebra über $\mathbb{R}$ erzeugen:

a)	$\{(a,b); a<b\}$	b)	$\{[a,b]; a<b\}$
c)	$\{(a,b]; a<b\}$	d)	$\{[a,b); a<b\}$
e)	$\{(-\infty,b); b\in\mathbb{R}\}$	f)	$\{(a,\infty); a\in\mathbb{R}\}$
g)	$\{(-\infty,b]; b\in\mathbb{R}\}$	h)	$\{[a,\infty); a\in\mathbb{R}\}$

(4 Punkte)

Aufgabe 6. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{M}_n$ die vom System $\{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$ auf $\mathbb{N}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_n$ aus allen Mengen $A \subset \mathbb{N}$ besteht, welche entweder $A \subset \{1,\dots,n\}$ oder $m \in A$ für alle $m > n$ erfüllen. Folgern Sie daraus, dass $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Warum ist dennoch $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$ keine σ-Algebra auf $\mathbb{N}$?
(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html