Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 3

Abgabe am 12.11.2008 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Sei X eine nichtleere Menge, sei $\mathcal{R}$ ein Ring über X und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Bezeichne $\mu^\star$ das in der Vorlesung definierte äußere Maß. Zeigen Sie, dass $\mu^\star$ regulär ist, d.h. dass für jede Menge $E \subset X$ eine $\mu^\star$-meßbare Obermenge A existiert, mit $E \subset A$ und $\mu^\star(E) = \mu^\star(A)$. Zeigen Sie ferner, dass die Obermenge A so gewählt werden kann, dass $A \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ für die kleinste von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ gewählt werden kann.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei

$$\overline{\mathcal{A}}^\mu := \{E \in X \mid \exists A, N_0 \in \mathcal{A} \text{ s.d. } \mu(N_0) = 0,\ E = A \cup N,\ N \subset N_0\}\,.$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}}^\mu \to [0, \infty]$, $E = A \cup N \mapsto \mu(A)$ ist wohldefiniert.

b) Es gibt $B, C \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A \subset C$ und $\mu(C \setminus B) = 0$ genau dann, wenn $A \in \overline{\mathcal{A}}^\mu$ gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\mu^\star : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & , A = \emptyset; \\ 1 & , A \text{ beschränkt und nicht leer;} \\ \infty & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mu^\star$ kein Maß, aber ein äußeres Maß ist, und bestimmen Sie $\mathcal{A}_{\mu^\star}$.

(5 Punkte)

Bitte wenden →

Aufgabe 4. Sei (X,d) ein metrischer Raum und bezeichne $\mathrm{diam}(A)$ den Durchmesser von $A \subset X$, d.h. $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$, falls $A \neq \emptyset$, und andernfalls $\mathrm{diam}(A) = 0$. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{F}$ und sei $\mu : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ eine Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$. Betrachten Sie $\mathcal{F}_\epsilon := \{F \in \mathcal{F} \mid \mathrm{diam}(F) < \epsilon\}$. Für jedes $\epsilon > 0$ sei $\mu_\epsilon : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ gegeben durch

$$\mu_\epsilon(A) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \mid F_n \in \mathcal{F}_\epsilon \, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ und } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\},$$

falls solche Überdeckungen $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ von A existieren, und andernfalls sei $\mu_\epsilon(A) := \infty$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $\epsilon > 0$ ist μ_ϵ ein äußeres Maß.

b) Für jedes $A \subset X$ ist $\mu_\epsilon(A)$ monoton fallend in ϵ.

c) $\mu_0 : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit $\mu_0(A) := \lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon(A)$ ist ein wohldefiniertes äußeres Maß auf X.

(5 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html