Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 5

Abgabe am 26.11.2008 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Es sei μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{L}^m$. Zeigen Sie, dass $\mu = c(\mu)\lambda^m$, wobei

$$c(\mu) = \mu\left(\prod_{i=1}^{m}(0,1]\right).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ messbar, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ mit $X_i \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: Sind die Abbildungen

$$f|X_i : X_i \to Y$$

$(\mathcal{A}_{X_i}, \mathcal{B})$-messbar, so ist auch f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-messbar.

(2 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $(X, \mathcal{A})$ messbar. Zeigen Sie:

a) Sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so sind es auch die Funktionen

$$\alpha f,\ \alpha \in \mathbb{R}; \quad f+g; \quad f \cdot g; \quad |f|; \quad \min\{f,g\}; \quad \max\{f,g\}.$$

b) $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{L}^n)$-messbar, wenn jedes f_i $(\mathcal{A}, \mathcal{L}^1)$-messbar ist.

c) Es sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{L}}^1)$-messbarer Funktionen. Dann sind auch

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \overline{\lim}_n f_n \quad \text{und} \quad \underline{\lim}_n f_n$$

$(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{L}}^1)$-messbar.

(je 2 Punkte)

Bitte wenden →

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Ist f eine Regelfunktion, so ist f Borel-messbar.

b) Wenn f monoton ist, dann ist f Borel-messbar.

c) Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Lebesgue-Nullmenge, so ist f Lebesgue-messbar.

d) Ist f eine Regelfunktion, so ist f Lebesgue-messbar.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 5. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X, \overline{\mathcal{A}}^{\mu}, \overline{\mu})$ seine Vervollständigung und $f : E \to \mathbb{R}$, $\ E \in \overline{\mathcal{A}}^{\mu}$, eine Abbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$-messbar

(ii) Es existiert $A \subset E,\ A \in \mathcal{A},\ \overline{\mu}(E \setminus A) = 0$ mit: $f|A$ ist $\mathcal{A}$-messbar.

(4 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html