Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 9

Abgabe am 07.01.2009 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Im $\mathbb{R}^2$ sind die elliptischen Koordinaten durch den folgenden Diffeomorphismus gegeben:

$$\phi : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \ni \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin u \cdot \cosh v \\ \cos u \cdot \sinh v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie das Bild von ϕ und die zugehörige Transformationsformel für Integrale.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien $a, b \in (0,\infty)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Ellipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$ eingeschlossenen Fläche.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Bezeichne $\overline{B_4(0)}^+$ die obere Halbkugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0,\ 4^2 \geq x^2 + y^2 + z^2\}$, und für $0 \leq a \leq 4$ bezeichne Z_a den Zylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

a) Drücken Sie das Volumen von $\overline{B_4(0)}^+ \setminus Z_a$ durch ein mehrfaches Integral (keine Differenz von Integralen!) in zylindrischen Koordinaten aus und berechnen Sie dann dieses mehrfache Integral.

b) Bestimmen Sie $0 \leq a \leq 4$ so, dass das Volumen von $\overline{B_4(0)}^+ \setminus Z_a$ mit dem Volumen von $\overline{B_4(0)}^+ \cap Z_a$ übereinstimmt.

(4+2 Punkte)

Aufgabe 4. Drücken Sie den Flächeninhalt der in Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ angegebenen Fläche als ein mehrfaches Integral aus und berechnen Sie dieses.

a) $r \leq a + b\cos\ \varphi$, mit $a, b \in (0,\infty)$,

b) $r \leq a\cos\ 2\varphi$, mit $a \in (0,\infty)$.

(je 3 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html