Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 12

Abgabe am 28.01.2009 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

definierte Funktion f in $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist.

b) Folgern Sie daraus, dass es eine C^∞-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gibt, mit $f(t) = 1$ für $t \geq 1$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$.

c) Folgern Sie daraus schließlich, dass es ein $h \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_+)$ gibt mit $h|[-1,1]^m = 1$ und $h|\left(\mathbb{R} \setminus [-2,2]^m\right) = 0$

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass es einen C^∞-Weg $c : I \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$\operatorname{im} c = \{(x,0) \ : \ x \in I\} \cup \{(0,y) \ : \ y \in I\} =: C_+,$$

aber dass sich C_+ nicht regulär parametrisieren lässt.

(3 Punkte)

Aufgabe 3. Lässt sich $C_+ \cup \alpha(C_+)$, wobei α die Spiegelung an $0 \in \mathbb{R}^2$ ist, C^∞ oder regulär parametrisieren?

(2 Punkte)

Aufgabe 4. Benutzen Sie den Satz von Gauss, um den Flächeninhalt der von den folgenden Kurven berandeten Flächen zu berechnen:

a) $c(t) = (a \cos\ t, b \sin\ t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,\ 0 < a, b \in \mathbb{R},$

b) $c(t) = (\cos^3\ t, b \sin^3\ t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$

c) $c(t) = (t^2, (t^3/3) - t), \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}.$

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 5. Betrachten Sie für $0 < h < 1$ auf dem Ringgebiet $A_h := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ das Vektorfeld $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. Berechnen Sie die Divergenz von F sowie beide Seiten der Formel des Satzes von Gauss. **(3 Punkte)**

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html