Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 13

Abgabe am 04.02.2009 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Ein Vektorfeld heißt konservativ, oder ein Potentialfeld, wenn es eine differenzierbare Funktion ϕ gibt, sodass grad $\phi = F$.

Zeigen Sie: Ist F ein stetiges konservatives Vektorfeld im $\mathbb{R}^m$ und sind $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^m$ fest vorgegebene Punkte, dann ist für jeden regulären Weg c von p_1 nach p_2 das Wegintegral $\int_c F$ unabhängig von der Wahl des Weges c.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Sei F ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$. Die Rotation rot F von $F = (F_1, F_2, F_3)$ ist definiert als:

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Zeigen Sie:

a) Es ist genau dann div $F = 0$, wenn es ein Vektorfeld B auf $\mathbb{R}^3$ gibt mit $F = \operatorname{rot} B$.

b) Es gilt genau dann rot $F = 0$, wenn es eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt mit $F = \operatorname{grad} f$.

c) Sei $F : \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} F = 0$ gilt, aber dass sich F nicht als Gradient einer Funktion schreiben lässt. Wieso ist dies kein Widerspruch zu b)?

(3+3+3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A := S^2 \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir benutzen Kugelkoordinaten, um Punkte in A zu beschreiben. Diese sind gegeben durch $(\phi, \psi) \in [0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$, $(\phi, \psi) \mapsto (\cos\phi\cos\psi, \sin\phi\cos\psi, \sin\psi) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die folgenden Projektionen Einbettungen sind.

a) Zylinderprojektion: $P_Z : A \to \mathbb{R}^2, \quad (\phi, \psi) \mapsto (\phi, \sin\ \psi)$.

b) Mercatorprojektion: $P_M : A \to \mathbb{R}^2, \quad (\phi, \psi) \mapsto (\phi, \tan\ \psi)$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4. Sei M eine Drehfläche. Berechnen Sie das Volumen von M und geben Sie das Maß an.

(2 Punkte)

Aufgabe 5. Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass TM eine $2m$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$ ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 6. Sei (V, ψ) ein regulär parametrisiertes C^1-Flächenstück und sei $n(x)$ ein normierter Normalenvektor zu $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_{m-1}}(x)$. Zeigen Sie, dass

$$|\det D\psi(x)^t D\psi(x)|^{1/2} = \left| \det \left(n(x), \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_{m-1}}(x) \right) \right|.$$

(3 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html