UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

**UFR Math-Info**

# Analyse spectrale et distributions

Professeur Zarrabi

(http://www.math.u-bordeaux1.fr/~)

Semestre printemps 2012

## Table des matières

**1. Théorie spectrale des opérateurs borné** **3**
1.1. Eléments inversibles . . . . . 4
1.2. Spectre et résolvante . . . . . 5
1.3. Rayon spectral . . . . . 8
1.4. Valeurs propres approchées . . . . . 10
1.5. Opérateurs adjoints et opérateurs autoadjoints . . . . . 11
1.6. Opérateurs autoadjoints positifs . . . . . 14
1.7. Opérateurs normaux . . . . . 15

**2. Opérateurs compacts** **18**
2.1. Rappel : le théorème d'Arzela-Ascoli . . . . . 18
2.2. Opérateurs compacts . . . . . 20
2.3. Opérateurs transposés . . . . . 23
2.4. Théorie spectrale des opérateurs compacts . . . . . 24
2.5. Diagonalisation d'un opérateur normal et compact . . . . . 29

**3. Calcul fonctionnel** **30**
3.1. Calcul fonctionnel polynômial et rationnel . . . . . 30
3.2. Calcul fonctionnel continu pour les opérateurs autoadjoints . . . . . 31
3.3. Calcul fonctionnel continu pour les opérateurs normaux . . . . . 35

**4. Distributions** **38**
4.1. Fonctions tests . . . . . 38
4.2. Distributions . . . . . 39

4.3. Exemples fondamentaux . . . . . . 39
4.3.1. Fonctions localement intégrables . . . . . . 39
4.3.2. Suite régularisante . . . . . . 40
4.3.3. Les mesures . . . . . . 41
4.3.4. La fonction de Heaviside . . . . . . 43
4.4. Régularisation . . . . . . 43
4.5. Support d'une distribution . . . . . . 46
4.6. Opérateurs sur les distributions . . . . . . 46
4.6.1. Restriction . . . . . . 46
4.6.2. Localisation . . . . . . 46
4.6.3. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . . . 47
4.6.4. Multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ . . . . . . 47
4.7. Dérivation . . . . . . 48
4.8. Formule des sauts . . . . . . 53
4.9. Distributions à support compact . . . . . . 55
4.10. Solutions fondamentales . . . . . . 57

**5. Convolution des distributions** **60**
5.1. Produit tensoriel . . . . . . 60
5.2. Convolution des distributions . . . . . . 64
5.3. Convolution d'une distribution et d'une fonction . . . . . . 69

**6. Distributions tempérées** **72**
6.1. Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . . . . 72
6.2. Distributions tempérées . . . . . . 73
6.3. Transformation de Fourier . . . . . . 75
6.3.1. Rappel : Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ . . . . . . 75
6.3.2. Rappel : Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ . . . . . . 76
6.3.3. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . . . . 77
6.3.4. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . . . . . . 78
6.3.5. Transformation de Fourier des distributions à support compact . . . . . . 79
6.4. Solutions fondamentales tempérées d'un opérateur différentiel . . . . . . 81

**7. Espace de Sobolev** **82**

**A. Résumé** **88**
A.1. Chapitre 1 . . . . . . 88

**B. Exercices** **90**
B.1. Feuille n$^o$ 1 . . . . . . 90

# 1. Théorie spectrale des opérateurs borné

## Rappels

Soient $X, Y$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**Théorème 1.1 :** *Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $T$ *continue*

*(ii)* $T$ *continue en 0*

*(iii)* $\exists c > 0$ *tel que* $\forall x \in X : \|Tx\| \leq c \|x\|$ □

**Définition 1.2 :** On note $\mathcal{L}(X, Y)$ *l'ensemble des applications linéaires continues de $X$ dans $Y$*. Si $X = Y$, on pose $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Pour $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ on pose

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

et avec cette norme $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

**Théorème 1.3 :** *Si $Y$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach.* □

**Théorème 1.4 (d'isomorphisme de Banach) :** *Soient $X, Y$ deux espaces de Baanch. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est bijective, alors $T^{-1}$ est continue.*

*Ce théorème est une conséquence du théorème de l'application ouverte.* □

Remarque 1.5 : $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ est appelé *le dual* de $X$.

Notation : $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. $X'$ est un espace de Banach car $\mathbb{K}$ est complet.

**Corollaire 1.6 (Conséquences de Hahn-Banach) :** *Soit $x \in X$, alors il existe $\varphi \in X'$, $\|\varphi\| = 1$ tel que $\|x\| = \varphi(x)$. En particulier, on a*

$$\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)| .$$

*Si $\varphi(x) = 0$ $\forall \varphi \in X'$, alors $x = 0$.*

## 1.1. Eléments inversibles

**Définition 1.7 :** Soit $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On dit que $T$ *est inversible* s'il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $TS = I = ST$, où $I$ est l'application identité sur $X$.

Lorsque $S$ existe, il est unique. On note $S = T^{-1}$.

Remarque 1.8 : Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Pour que $T$ soit inversible, il suffit que $T$ soit bijectif (d'après le théorème d'isomorphisme de Banach 1.4).

**Lemme 1.9 :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$, $\|T\| < 1$, *alors* $I - T$ *est inversible et*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k \geq 0} T^k.$$

*Démonstration.* On a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T) = I - T^{n+1}. \qquad (*)$$

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}$ : $\|T^k\| \leq \|T\|^k$. Comme $\|T\| < 1$, il suit que $\sum_k \|T\|^k$ converge, donc $\sum_{k\geq 0} \|T^k\|$ converge et alors $\sum_{k \geq 0} T^k$ converge car $\mathcal{L}(X)$ est Banach[1].

On sait que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T) \xrightarrow{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I-T).$$

Ensuite $I - T^{n+1} \to I$ car $\left\|T^{n+1}\right\| \leq \|T\|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

De l'équation $(*)$, on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I-T) = I.$$

On vérifie de la même manière que $(I-T)\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right) = I$.

D'où $I - T$ est inversible et $(I-T)^{-1} = \sum_{k\geq 0} T^k$. $\square$

Remarque 1.10 : Plus généralement, si $\sum \|T^k\|$ converge, alors $I - T$ est inversible et

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} T^k.$$

[1]Dans un espace de Banach toute série absolument convergente est convergente.

Notation : On note par $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(X)$.

**Proposition 1.11 :** *(i) Pour tout* $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(x))$ :

$$\mathcal{B}\left(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$$

*où* $\mathcal{B}\left(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right)$ *est la boule de centre $T$ et de rayon* $\frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

*En particulier,* $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ *est un ouvert.*

*(ii) L'application* $T \to T^{-1}$ *est continue sur* $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$.

*Démonstration.* (i) Soit $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ et soit $S \in \mathcal{B}\left(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|}\right)$.

$$S = T - (T - S) = T(I - T^{-1}(T - S))$$
$$\left\|T^{-1}(T - S)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|T - S\| < 1$$

$\Longrightarrow$ $I - T^{-1}(T - S)$ est inversible et donc $S$ est inversible comme produit de deux éléments inversibles.

(ii) Soit $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$. Alors

$$(T + S)^{-1} - T^{-1} = (I + T^{-1}S)^{-1}T^{-1} - T^{-1}$$

Soit $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Donc (d'après le lemme 1.9) :

$$\begin{aligned}
(T + S)^{-1} - T^{-1} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (T^{-1}S)^k \cdot T^{-1}\right) - T^{-1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (T^{-1}S)^k \cdot T^{-1}\right) \\
\Longrightarrow \quad \left\|(T + S)^{-1} - T^{-1}\right\| &\leq \sum_{k\geq 1} \left\|T^{-1}\right\|^k \|S\|^k \left\|T^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|T^{-1}\right\| \frac{\left\|T^{-1}\right\| \|S\|}{1 - \|T^{-1}\| \|S\|} \xrightarrow{\|S\|\to 0} 0.
\end{aligned}$$

On a donc $T \to T^{-1}$ est continue sur $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$. □

## 1.2. Spectre et résolvante

Soit $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.

**Définition 1.12 :** Soit $T \in \mathcal{L}(X)$.

(1) L'ensemble $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - T \text{ est inversible}\}$ est appelé *l'ensemble résolvant de $T$.*

(2) L'ensemble $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ est appelé *le spectre de* $T$. On a

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - T \text{ est non inversible}\}$$

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que $\lambda$ *est valeur propre de* $T$ s'il existe $x \in X, x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$.

On note $\sigma_p(T)$ *l'ensemble des valeurs propres* de $T$.

**Proposition 1.13 :** *$\sigma(T)$ est compact et $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leq \|T\|\}$.*

*Démonstration.* Soit $|\lambda| > \|T\|$. Alors $I - \frac{T}{\lambda}$ est inversible car $\left\|\frac{T}{\lambda}\right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$. Donc on a $\lambda I - T = \lambda\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)$ est inversible $\implies \lambda \notin \sigma(T)$.

Alors $|\lambda| > \|T\| \implies \lambda \notin \sigma(T)$.

Ceci montre que $\sigma(T) \subset \{\lambda \in K,\ |\lambda| \leq \|T\|\}$. En particulier $\sigma(T)$ est borné. Pour montrer que $\sigma(T)$ est compact, il suffit de montrer que $\sigma(T)$ est fermé ce qui est équivalent à $\rho(T)$ est ouvert.

Soit $\lambda \in \sigma(T)$. On a $(\lambda I - T) - (\mu I - T) = (\lambda - \mu)I$.

Si $|\lambda - \mu| < \dfrac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|}$, alors $\mu I - T \in \mathcal{B}\left(\lambda I - T, \dfrac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|}\right) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ (d'après la proposition 1.11).

Il suit $\mu \in \rho(T)$.

Puisque $\left\{\mu\ :\ |\lambda - \mu| < \dfrac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|}\right\} \subset \rho(T)$, donc $\rho(T)$ est un ouvert. $\square$

Remarque 1.14 : (i) $\lambda \in \sigma_p(T) \iff \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$. De plus $\lambda \in \sigma_p(T) \implies \lambda I - T$ non inversible, d'où $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

(ii) Soit $\dim X < \infty$. Donc $\lambda I - T$ inversible $\iff \ker(\lambda I - T) = \{0\}$. On a alors $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

(iii) Soit $\dim X = \infty$. En général, $\sigma_p(T) \neq \sigma(T)$.

**Définition 1.15 :** L'application $\lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$ définie sur $\rho(T)$ est appelée *la résolvante de* $T$. On note $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

**Proposition 1.16 :** *L'application $\lambda \mapsto R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ est analytique, c'est-à-dire développable en série entière, de $\rho(T)$ dans $\mathcal{L}(X)$.*

*Démonstration.* Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$.

$$\begin{aligned}\lambda I - T = (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - T &= (\lambda_0 I - T)\left((\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - T)^{-1} + I\right) \\ &= (\lambda_0 I - T)(I - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T))\end{aligned}$$

Si $|\lambda - \lambda_0| \, \|R_{\lambda_0}(T)\| < 1 \iff |\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$, alors $\lambda \in \rho(T)$, et on a

$$(\lambda I - T)^{-1} = (I - (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0})^{-1} R_{\lambda_0} = \sum_{k \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^{k+1},$$

d'où $\lambda \mapsto R_{\lambda_0}$ est analytique sur $\rho(T)$. □

**Proposition 1.17 :** $\forall \lambda, \mu \in \rho(T)$, *on a :*

*(i)* $R_\lambda(T) R_\mu(T) = R_\mu(T) R_\lambda(T)$

*(ii)* $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\mu(T) R_\lambda(T)$ *(la formule de résolvante)*

*Démonstration.* (i) Découle du fait que $(\lambda I - T)(\mu I - T) = (\mu I - T)(\lambda I - T)$.

(ii) $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T) R_\mu(T)(\mu I - T) - R_\mu(T) R_\lambda(T)(\lambda I - T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T)$ □

**Théorème 1.18 :** *Lorsque $X$ est complexe, $\sigma(T)$ est non vide.*

*Démonstration.* Supposons que $\sigma(T) = \emptyset$, $\rho(T) = \mathbb{C}$. Donc $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique sur $\mathbb{C}$ (cf. Proposition 1.16).

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X)$. Donc l'application $\psi : \lambda \mapsto \varphi(R_\lambda(T))$ est analytique et donc holomorphe dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire une fonction entière). Pour $|\lambda| > \|T\|$ on a :

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$
$$\implies \|R_\lambda(T)\| \leq \sum_{n \geq 0} \left\| \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \xrightarrow{|\lambda| \to +\infty} 0$$
$$\implies |\psi(\lambda)| = |\varphi(R_\lambda(T))| \leq \|\varphi\| \, \|R_\lambda(T)\| \xrightarrow{|\lambda| \to +\infty} 0$$

$\psi$ est une fonction entière bornée car $\|R_\lambda(T)\|$ est continue sur $\rho(T) = \mathbb{C}$ et $\|R_\lambda(T)\| \to 0$, donc d'après le théorème de Liouville[2] : $\psi$ est constante.

Comme $|\psi(\lambda)| \xrightarrow{|\lambda| \to +\infty} 0 \implies \psi \equiv 0$. On a alors $\varphi(R_\lambda(T)) = 0$, ceci est vrai pour toutes $\varphi \in \mathcal{L}(X) \implies R_\lambda(T) = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\sigma(T) \neq 0$. □

Exemple : (i) $X = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Soit $T : X \to X$, $f \mapsto Tf$ où $Tf(t) = tf(t) \implies \big[(\lambda I - T) f\big](t) = (\lambda - t) f(t)$.

On veut trouver le spectre de $T$.

[2]cf. le cours d'analyse complexe

- Si $\lambda \notin [0,1]$, alors $\lambda I - T$ est inversible et l'opérateur $(\lambda I - T)^{-1} : X \to X$ avec $f \mapsto \left(t \mapsto \frac{1}{\lambda - t} f\right)$ est bien défini $\implies \sigma(T) \subset [0,1]$.
- Réciproquement soit $\lambda \in [0,1]$, $\big[(\lambda I - T)f\big](t) = (\lambda - t)f(t)$. Cette fonction s'annule en $\lambda$. D'où l'image $\operatorname{Im}(\lambda I - T) \subset \{f \in X,\ f(\lambda) = 0\}$ et il s'ensuit que $\lambda I - T$ n'est pas surjectif $\implies \lambda I - T$ non inversible $\implies \lambda \in \sigma(T)$.

  D'où $\sigma(T) = [0,1]$.

  Exercice : Vérifier que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

(ii) Soit $X = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \sum\limits_{n\geq 0} |x_n|^2 < \infty\right\}$ et $\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum\limits_{n\geq 0} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $T : X \to X$ tel que $(x_0, x_1, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots)$. $T \in \mathcal{L}(X)$ et $\|T\| = 1$.

De plus soit $|\lambda| < 1$ et $x^\lambda = (\lambda^n)_{n\geq 0} \in X$. Alors

$$Tx^\lambda = (\lambda^{n+1})_{n\geq 0} = \lambda(\lambda^n)_{n\geq 0} = \lambda x^\lambda \overset{x^\lambda \neq 0}{\implies} \lambda \in \sigma_p(T)$$

où $\sigma_p(T)$ est le spectre ponctuel. Donc

$$\{\lambda,\ |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \{\lambda,\ |\lambda| \leq \underbrace{\|T\|}_{=1}\}$$

$$\implies \{\lambda,\ |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T) \subset \{\lambda,\ |\lambda| \leq 1\}$$

On obtient $\{\lambda,\ |\lambda| \leq 1\} \subset \overline{\sigma(T)} \subset \{\lambda,\ |\lambda| \leq 1\} \implies \overline{\sigma(T)} = \{\lambda,\ |\lambda| \leq 1\}$.

Or $\sigma(T)$ est fermé $\implies \sigma(T) = \{\lambda,\ |\lambda| \leq 1\}$.

### 1.3. Rayon spectral

Soit $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**Définition 1.19 :** Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T) = \emptyset$, on pose $r(T) := \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(T)\}$ et on appelle $r(T)$ le *rayon spectral de* $T$.

**Théorème 1.20 :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$.

*(1) La limite* $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ *existe et elle est égale à* $\inf\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

*(2) Si X est complexe, alors* $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

*Démonstration.* (1) Soit $l = \inf\limits_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ et $\varepsilon > 0$.

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|T^k\|^{\frac{1}{k}} \leq l + \varepsilon$. De plus, pour quelque soit $n \in \mathbb{N}$, ils existent $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ tels que $n = p_n k + q_n$ avec $0 \leq q_n \leq k-1$ (c'est la division euklidienne de $n$ par $k$).

On a $0 \leq \frac{q_n}{n} \leq \frac{k-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies \frac{q_n}{n} \to 0$. Puisque $1 = k\frac{p_n}{n} + \frac{q_n}{n}$, on a $\frac{p_n}{n} \to \frac{1}{k}$. Donc on obtient

$$\begin{aligned} \left\|T^n\right\|^{\frac{1}{n}} &= \left\|T^{kp_n+q_n}\right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|T^k\right\|^{\frac{p_n}{n}} \left\|T\right\|^{\frac{q_n}{n}} \\ &\implies \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \\ &\implies \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \inf_k \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leq \liminf_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Alors $\limsup_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \liminf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

(2) Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Pour $n \geq 1$ on a $(\lambda^n I - T^n) = (\lambda I - T)\left(T^{n-1} + \lambda T^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} I\right)$. Car $(\lambda I - T)$ est non inversible, il suit que $(\lambda^n I - T^n)$ est non inversible. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(T) &\implies |\lambda^n| \leq \|T^n\| \implies |\lambda| \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\implies |\lambda| \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &\implies r(T) = \sup\{|\lambda|\,,\ \lambda \in \sigma(T)\} \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

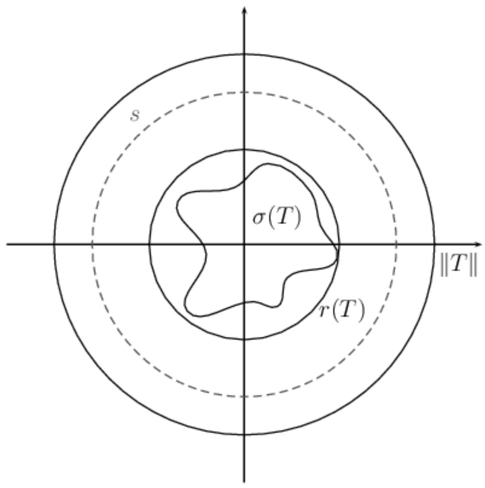
Soit maintenant $|\lambda| > \|T\|$. Alors on a

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)^{-1} &= \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \qquad \text{car} \quad \left\|\frac{T}{\lambda}\right\| < 1 \\ \implies (\lambda I - T)^{-1} &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \qquad |\lambda| > \|T\| \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X)'$ (le dual de $\mathcal{L}(X)$) où $\varphi((\lambda I - T)^{-1}) = \sum_{k\geq 0} \frac{\varphi(T^k)}{\lambda^{k+1}}$.

L'application $\lambda \mapsto \varphi((\lambda I - T)^{-1})$ est analytique et donc holomorphe dans $\rho(T)$.
En particulier $\lambda \mapsto \varphi((\lambda I - T)^{-1})$ est holomorphe dans $\{|\lambda| > \rho(T)\}$. Par unicité du developpement en série de Laurent, on a

$$\varphi((\lambda I - T)^{-1}) = \sum_{k\geq 0} \frac{\varphi(T^k)}{\lambda^{k+1}} \qquad |\lambda| > r(T).$$



Soit $s > r(T)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi((se^{i\theta}I - T)^{-1})e^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{\varphi(T^k)}{s^{k+1}}e^{-i(k-n)\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(T^k)}{s^{k+1}}e^{-i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\varphi(T^n)}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

car $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\varphi(T^n) &= s^{n+1}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi((se^{i\theta}I - T)^{-1})e^{i(n+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
\Longrightarrow\ |\varphi(T^n)| &\leq s^{n+1}\,\|\varphi\| \sup_{\theta\in[0,2\pi)}\left\|(se^{i\theta} - T)^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient $\displaystyle \|T^n\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|\leq 1 \\ \varphi\in\mathcal{L}(X)'}} |\varphi(T^n)| \leq s^{n+1}\beta(s)$ et alors

$$\begin{aligned}
\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq s^{1+\frac{1}{n}}\beta(s)^{\frac{1}{n}} &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq s \qquad\qquad \forall s > r(T) \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq s \to r(T)
\end{aligned}$$

□

## 1.4. Valeurs propres approchées

Soit $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(X)$.

**Définition 1.21 :** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que $\lambda$ et une *valeur propre approchée* s'il existe une suite $(x_n)$ dans $X$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$ : $\|Tx_n - \lambda x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

On note par $\sigma_{ap}(T)$ l'ensemble des valeurs propres approchées de $T$.

Remarque 1.22 : (i) On a $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

En effet, soit $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe $x \in X\backslash\{0\}$ : $Tx = \lambda x$. On pose $x_k = \dfrac{x}{\|x\|}$ $\forall k$.

(ii) $\displaystyle \lambda \notin \sigma_{ap}(T) \iff \inf_{\|x\|=1}\|Tx - \lambda x\| > 0 \iff \exists\delta > 0\ \forall x \in X :\ \|Tx - \lambda x\| > \delta\,\|x\|.$

**Proposition 1.23 :** *$\sigma_{ap}(T)$ est un fermé contenu dans $\sigma(T)$.*

*Démonstration.* Soit $\lambda \notin \sigma(T)$. Soit $(x_n) \subset X$ tel que $\|x_n\| = 1$ pour tout n. On a

$$1 = \|x_n\| = \left\|(T - \lambda I)(T - \lambda I)^{-1}x_n\right\| \leq \left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\|\,\|(T - \lambda I)x_n\|$$

Car $\|(T-\lambda I)x_n\| \nrightarrow 0$ , on a $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$.

Alors, on a obtenu $\lambda \notin \sigma(T) \implies \lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, et il suit $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.

Maintenant on montre que $\sigma_{ap}(T)$ est fermé.

Soit $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Par le remarque 1.22 (ii), on a $\exists \delta\ \forall x \in X\ :\ \|Tx - \lambda x\| > \delta \|x\|$. Soit $\mu$ tel que $|\mu - \lambda| < \frac{\delta}{2}$.

$$\begin{aligned}\|(T-\mu I)x\| = \|(T-\lambda I)x + (\lambda-\mu)Ix\| &\geq \|(T-\lambda I)x\| - \|\lambda-\mu\|\,\|x\| \\ &\geq \delta\,\|x\| - \frac{\delta}{2}\,\|x\| \qquad\qquad \forall x \in X\end{aligned}$$

Donc $\|(T-\mu I)x\| \geq \frac{\delta}{2}\,\|x\| \implies \mu \notin \sigma_{ap}(T)$, d'où $\mathbb{K} \setminus \sigma_{ap}(T)$ est un ouvert. □

**Théorème 1.24 :** *Il est vrai :* $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

*Démonstration.* Soit $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\lambda \in \rho(T) = \mathbb{K}\setminus\sigma(T)$ tel que $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons que $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|}$. D'après la proposition 1.11, on a

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - T) - (\lambda_0 I - T)\| = |\lambda - \lambda_0| &< \frac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|} \\ \implies \lambda_0 I - T &\in \mathcal{B}\left(\lambda I - T, \frac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|}\right) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))\end{aligned}$$

Alors, $\lambda_0 I - T$ est inversible ce qui est absurde car $\lambda_0 \in \partial\sigma(T) \subset \sigma(T)$. Donc on a

$$|\lambda - \lambda_0| \geq \frac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|} \implies \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|} > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Alors, il existe $y \in X$, $\|y\| = 1$ tel que $\left\|(\lambda I - T)^{-1} y\right\| \geq \frac{2}{\varepsilon}$.

Posons $x = \dfrac{(\lambda I - T)^{-1} y}{\|(\lambda I - T)^{-1} y\|} \implies \|x\| = 1$. On obtient

$$\begin{aligned}\|(\lambda_0 I - T)x\| &\leq \|(\lambda_0 I - T)x - (\lambda I - T)x\| + \|(\lambda I - T)x\| \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda|\,\|x\| + \left\|\frac{y}{\|(\lambda I - T)^{-1} y\|}\right\| \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda| + \frac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1} y\|} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

$$\implies \inf_{\|x\|=1} \|(\lambda_0 I - T)x\| \leq \varepsilon \implies \inf_{\|x\|=1} \|(\lambda_0 I - T)x\| = 0 \implies \lambda_0 \in \sigma_{ap}(T)$$ □

## 1.5. Opérateurs adjoints et opérateurs autoadjoints

Soit $H$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.

**Définition 1.25 :** L'adjoint de $T$, noté $T^*$, est défini par $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire sur $H$.

Remarque 1.26 : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $T, S \in \mathcal{L}(H)$, on a les propriétés suivantes :

$$(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^* \qquad (TS)^* = S^*T^* \qquad \|T^*\| = \|T\|$$
$$(T+S)^* = S^* + T^* \qquad (T^*)^* = T$$

**Proposition 1.27 :** *De plus, il est vrai*

*(1)* $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$

*(2)* $\overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^{\perp}$

*(3)* *$T$ est inversible si et seulement si $T^*$ l'est et on a dans ce cas* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

*Démonstration.* (1) Soit $x \in \ker T$. Alors

$$\forall y \in H \ : \ \langle Tx, y\rangle = 0 \iff \forall y \in H \ : \ \langle x, T^*y\rangle = 0 \iff x \in (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$$

(2) On a $T^{**} = T$. Donc d'après (1), il suit

$$\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp} \implies (\ker T^*)^{\perp} = \left((\operatorname{Im} T)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T}.$$

(3) Soit $T$ inversible. Alors on a $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^* = I$ et de même $(T^{-1})^*T^* = I$. Donc $T^*$ est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

De la même façon, on obtient : Si $T^*$ est inversible, alors $T^{**} = T$ est inversible. $\square$

**Corollaire 1.28 :** *On a* $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda},\ \lambda \in \sigma(T)\}$. *Si* $\lambda \in \rho(T)$ : $R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T-)^*$.

*Démonstration.* Puisque $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda}I - T^*$, il suit que

$$\lambda I - T \text{ inversible} \iff (\lambda I - T)^* \text{ inversible} \iff \overline{\lambda}I - T^* \text{ inversible}$$

et donc $\lambda \in \sigma(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.
Si $\lambda \in \rho(T)$ : $R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda}I - T^*)^{-1} = \left[(\lambda I - T)^{-1}\right]^* = R_\lambda(T)^*$. $\square$

Exemple : Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ où $\langle x, y\rangle = \sum x_n\overline{y_n}$ avec $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.
Soient

$$S : H \to H \qquad (x_0, x_1, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$$
$$S^* : H \to H \qquad (x_0, x_1, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots).$$

On a vu que $\sigma(S^*) = \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}\ |z| \leq 1\}$ et $\sigma(S) = \{\overline{\lambda},\ \lambda \in \sigma(S^*)\} = \mathbb{D}$.

**Lemme 1.29 :** *Soit $X$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall x \in X \;:\; \|Tx\| \geq \delta \|x\|$

*(ii)* $\ker T = \{0\}$ *et* $\operatorname{Im} T$ *est fermé.*

*Démonstration.* '(*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*)': On a pour tous $x \in X \;:\; \|Tx\| \geq \delta \|x\|$.

Si $Tx = 0$, alors $\|x\| = 0 \implies x = 0$. Donc $\ker T = \{0\}$.

Soit $(Tx_n) \subset \operatorname{Im} T$ avec $Tx_n \to y \in X$. Puisque $\delta \|x_n - x_m\| \leq \|Tx_n - Tx_m\|$ et $(Tx_n)$ est une suite de Cauchy, alors $(x_n)$ est une suite de Cauchy. Donc il existe $x \in X \;:\; x_n \to x$.

On a alors $Tx_n \to y$ et $Tx_n \to Tx$, d'où $y = Tx \implies y \in \operatorname{Im} T$ par le théorème du graph fermé.

'(*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*)': Soit $\tilde{T} : X \to \operatorname{Im} T$ avec $x \mapsto Tx$. Evidemment $\tilde{T}$ est bijectif. De plus $X$ et $\operatorname{Im} T$ sont des espaces de Banach. D'après le théorème 1.4, il existe $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} T, X)$.

$$\forall x \in X : \qquad x = \tilde{T}^{-1}\tilde{T} \implies \|x\| \leq \|\tilde{T}^{-1}\|\|\tilde{T}x\| \leq \|\tilde{T}^{-1}\| \, \|Tx\|$$
$$\implies \delta \|x\| \leq \|Tx\|$$

□

**Définition 1.30 :** Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ où $H$ est un espace de Hilbert. On dit que $T$ *est autoadjoint* si $T^* = T$.

**Théorème 1.31 :** *Soit $H$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint. On pose*

$$m := \inf\{\langle Tx, x\rangle,\, x \in H,\, \|x\| = 1\} \qquad et \qquad M := \sup\{\langle Tx, x\rangle,\, x \in H,\, \|x\| = 1\}.$$

*Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, en particulier $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

*Démonstration.* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H \setminus \{0\}$. On note $d(\lambda) := \inf\{|\lambda - t|\,,\, t \in [m, M]\}$ la distance de $\lambda$ au segment $[m, M]$. On a

$$\langle \lambda x - Tx, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle = \left(\lambda - \langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle\right) \|x\|^2$$
$$\implies |\langle \lambda x - Tx, x\rangle| \geq d(\lambda)\, \|x\|^2$$
$$\implies \|(\lambda I - T)x\| \geq d(\lambda)\, \|x\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

Supposons que $\lambda \notin [m, M] \implies d(\lambda) > 0$. D'après le lemme précédent (1.29), $\lambda I - T$ est injectif et $\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ est fermé. On a

$$\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - T)} = \ker(\overline{\lambda} I - T^*)^\perp = \ker(\lambda I - T)^\perp \qquad (\text{car } T = T^*)$$
$$= \{0\}^\perp = H$$

D'où $\operatorname{Im}(\lambda I - T) = H \implies \lambda I - T$ inversible, donc $\lambda \notin \sigma(T)$ et on obtient l'inclusion $\sigma(T) \subset [m, M]$. □

Remarque 1.32 : Il est vrai que $m, M \in \sigma(T)$ ce qui sera démontré au théorème 1.34.

## 1.6. Opérateurs autoadjoints positifs

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

**Définition 1.33 :** Un opérateur autoadjoint $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit *positif* si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.

**Théorème 1.34 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint. On pose $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle,\ x \in H,\ \|x\| = 1\}$ et $M = \sup\{\langle Tx, x\rangle,\ x \in H,\ \|x\| = 1\}$. Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$. De plus : $m, M \in \sigma(T)$.*

*Démonstration.* On a déjà vu que $\sigma(T) \subset [m, M]$.[3]

Montrons que $m \in \sigma(T)$. Soit $S = T - mI$. On a $S = S^*$. On pose $\Phi(x, y) = \langle Sx, y\rangle$ une forme sesquilinéaire. $\Phi$ est positif : Pour $x \neq 0$

$$\Phi(x, x) = \langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - m\langle x, x\rangle = \left(\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle - m\right)\|x\|^2 \geq 0$$

par définition de $m$. Pous le produit scalaire, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle Sx, y\rangle|^2 \leq \langle Sx, x\rangle\langle Sy, y\rangle \qquad \text{ou bien} \qquad |\langle Sx, y\rangle| \leq \|Sx\|\,\|y\|\,.$$

Par définition de $m$, il existe $(x_n) \subset H$ avec $\|x_n\| = 1$ pour tous $n$ tel que

$$\langle Sx_n, x_n\rangle = \langle Tx_n, x_n\rangle - m \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\|Sx_n\|^2 = \langle Sx_n, \overset{=y}{Sx_n}\rangle &\leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}}\langle Sy, y\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle Sx_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}}\langle S^2x_n, Sx_n\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}}\left\|S^2x_n\right\|^{\frac{1}{2}}\|Sx_n\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}}\|S\|^{\frac{1}{2}}\|Sx_n\|^{\frac{1}{2}}\|Sx_n\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}}\|S\|^{\frac{1}{2}}\|Sx_n\| \\
\iff \|Sx_n\| &\leq \langle Sx_n, x_n\rangle^{\frac{1}{2}}\|S\|^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Alors $S$ n'est pas inversible, donc $T - mI$ n'est pas inversible. Il s'ensuit $m \in \sigma(T)$.

Pour montrer que $M \in \sigma(T)$, appliquer ce qui précède à $MI - T$. □

**Proposition 1.35 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. Alors $T$ est positif si et seulement si $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$.*

*Démonstration.* '$\Longrightarrow$': Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ positif, $T = T^*$.

On a $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle,\ \|x\| = 1\} \geq 0$ et $M = \sup\{\langle Tx, x\rangle,\ \|x\| = 1\} \geq 0$. D'où

$$\sigma(T) \subset [m, M] \subset [0, \infty).$$

[3]cf. théorème 1.31

Réciproquement, supposons que $\sigma(T) \subset [0,\infty)$. On a $m \geq 0$ d'après le théorème 1.34 et alors

$$\forall x \in H \setminus \{0\} \ : \qquad \langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle \geq m \geq 0 \iff \langle Tx, x\rangle \geq m\,\|x\|^2 \geq 0. \qquad \square$$

**Proposition 1.36 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint et positif. Alors il existe un unique $S \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint et positif, tel que $T = S^2$. On note $S = \sqrt{T}$.*

*Démonstration.* On a $\sigma(T) \subset [0,\infty)$ d'après la proposition 1.35. Soit $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in \sigma(T)$ et $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. On pose $S = f(T)$ d'après le théorème de calcul fontionnel pour les opérateurs autoadjoints (théorème 3.5). On a que $S^* = \bar{f}(T) = f(T) = S$ et alors $S$ est autoadjoint.

Il suit de $\sigma(S) = \sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) \subset [0,\infty)$ que $S$ est positif d'après la proposition 1.35 et par définition de $f$, on obtient $S^2 = f(T)f(T) = f^2(T) = T$.

Il reste à montrer l'unicité. Soit $R \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint positif tel que $R^2 = T$. Posons $g(t) = t^2$. Alors, on a $g \circ f = \mathrm{id}_t = t$. Donc

$$(f\circ g)(R) = R \iff f(g(R)) = R \iff f(R^2) = R \iff f(T) = R \implies S = R. \qquad \square$$

<u>Remarque 1.37</u> : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint et positif. Soit $\varepsilon > 0$. On peut définir $T^\alpha = f_\alpha(T)$ où $f_\alpha(t) = t^\alpha$, $\forall t \in [0,\infty)$.

On a $T^{\alpha+\beta} = T^\alpha \cdot T^\beta$.

## 1.7. Opérateurs normaux

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

**Définition 1.38 :** Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que $T$ *est normal* si $TT^* = T^*T$.

<u>Remarque 1.39</u> : (i) $T$ autoadjoint $\implies$ $T$ normal.

(ii) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $T$ normal, alors $T$ est diagonalisable dans une base orthonormée.[4]

**Théorème 1.40 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Alors*

*(1)* $\forall x \in H \ : \ \|Tx\| = \|T^*x\|$

*(2)* $\ker T = \ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$

*(3) Si* $Tx = \alpha x$, $x \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$, *alors* $T^*x = \overline{\alpha}x$.

*(4) Si* $\alpha \neq \beta$, *alors* $\ker(\alpha I - T)$ *et* $\ker(\beta I - T)$ *sont orthogonaux.*

*Démonstration.* (1) $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$.

[4] cf. théorème 2.27

(2) Soit $x \in \ker T$ . Alors

$$Tx = 0 \iff \|Tx\| = 0 \iff \|T^*x\| = 0 \iff T^*x = 0 \iff x \in \ker T^*.$$

(3) $\alpha I - T$ est un opérateur normal. Donc

$$\begin{aligned} Tx = \alpha x \iff x \in \ker(\alpha I - T) &\iff x \in \ker((\alpha I - T)^*) \\ &\iff x \in \ker(\overline{\alpha} I - T^*) \iff T^*x = \overline{\alpha} x. \end{aligned}$$

(4) Soit $x \in \ker(\alpha I - T)$ et $y \in \ker(\beta I - T)$ où $\alpha \neq \beta$.

$$\begin{aligned} \alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\beta} y\rangle &= \beta\langle x, y\rangle \\ &\implies (\alpha - \beta)\langle x, y\rangle = 0 \implies \langle x, y\rangle = 0 \\ &\implies \ker(\alpha I - T) \perp \ker(\beta I - T) \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.41 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal et soit $\lambda \in \sigma(T)$. Alors il existe $(x_n) \subset H$ avec $\|x_n\| = 1$ telle que $Tx_n - \lambda x_n \to 0$ et $T^*x_n - \bar{\lambda} x_n \to 0$.*

*Démonstration.* $S = T - \lambda I$ et $S^*S$ ne sont pas inversibles. Donc $0 \in \sigma(S^*S)$. Comme $S^*S$ est autoadjoint, on a $\sigma(S^*S) \subset \mathbb{R}$. Puisque $\partial\sigma(S^*S) \subset \sigma_{ap}(S^*S)$ et $\partial\sigma(S^*S) = \sigma(S^*S)$,[5] il suit $\sigma(S^*S) = \sigma_{ap}(S^*S)$ et donc $0 \in \sigma_{ap}(S^*S)$.

Alors, il existe $(x_n) \subset H$, $\|x_n\| = 1$ telle que $\|S^*Sx_n\| \to 0$. Il s'ensuit

$$\|Sx_n\|^2 = \langle S^*Sx_n, x_n\rangle \leq \|S^*Sx_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies \|(T - \lambda I)x_n\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$S$ est normal, donc $\|S^*x_n\| = \left\|(T^* - \bar{\lambda} I)x_n\right\| = \|(T - \lambda I)x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$ □

**Proposition 1.42 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Alors $r(T) = \|T\|$.*

*Démonstration.* On fait le raisonnement en trois étapes.

Premièrement, soit $(x_n)$ une suite dans $H$ avec $\|x_n\| = 1$ telle que $\|Tx_n\| \to \|T\|$. On a

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &\geq |\langle T^*Tx_n, x_n\rangle| && \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= \langle Tx_n, Tx_n\rangle = \|Tx_n\|^2 \\ \overset{n\to\infty}{\implies} \|T^*T\| &\geq \left\|T^2\right\| \end{aligned}$$

D'autre part $\|T^*T\| \leq \|T\|^2 \implies \|T^*T\| = \|T\|^2$. Cette égalité est vraie pour quelque soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

Deuxièmement, on suppose que $T$ soit autoadjoint. On a d'après la première étape de cette preuve : $\left\|T^2\right\| = \|T\|^2$. Par récurrence on a que

$$\left\|T^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n} \implies \left\|T^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|T\| \implies \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}}}_{=r(T)} = \|T\|.$$

[5] car le spectre et réelle

Troisièmement, on suppose $T$ soit normal. On pose $S = T^*T$. $S$ est par définition autoadjoint, alors $r(S) = \|S\|$. Il s'ensuit $\lim_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} = \|S\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$ (cf. première étape).

$$\|S^n\|^{\frac{1}{n}} = \|(T^*T)^n\|^{\frac{1}{n}} = \|(T^*)^n\, T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|(T^n)^*\, T^n\|^{\frac{1}{n}} = \|T^n\|^{\frac{2}{n}}$$

Donc, on obtient $\lim_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{2}{n}} \implies \|T\|^2 = r(T)^2$. □

# 2. Opérateurs compacts

## 2.1. Rappel : le théorème d'Arzela-Ascoli

Soit $(E, d)$ un espace métrique On note par $\mathcal{C}(E)$ l'espace des fonctions continues sur $E$.

**Définition 2.1 :** Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(E)$.

(1) On dit que $\mathcal{H}$ *est équicontinue en* $x_0 \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \forall f \in \mathcal{H} : \ d(x, x_0) < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit que $\mathcal{H}$ *est équicontinue* si elle est équicontinue en tout point de $E$.

(2) On dit que $\mathcal{H}$ *est uniformément équicontinue* si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in E \ \forall f \in \mathcal{H} : \ d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Proposition 2.2 :** *Supposons que $E$ soit compact. Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(E)$. Alors $\mathcal{H}$ est équicontinue si et seulement si $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue.*

*Démonstration.* '$\Longleftarrow$': trivial

'$\Longrightarrow$': Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in E$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$\forall y \in E \ \forall f \in \mathcal{H} : \ d(x, y) < \delta_x \implies |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

On a $E = \bigcup_{x \in E} \mathcal{B}(x, \frac{\delta_x}{2})$. Comme $E$ est compact, ils existent $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}). \tag{2.1}$$

Posons $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2} \right\} > 0$ et soient $x, y \in E$ tels que $d(x, y) < \delta$.

D'après l'équation (2.1), il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$. Il s'ensuit

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

D'où $\forall f \in H : \ |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ □

**Définition 2.3 :** Soit $(E, d)$ un espace métrique. Une partie $A$ de $E$ est dite *précompacte* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $F$ tel que $\forall x \in A \ \exists y \in F : \ d(x, y) < \varepsilon$.

Remarque 2.4 : $A$ est précompacte si et seulement si $\overline{A}$ est précompacte.

**Théorème 2.5 :** *Soit $(E,d)$ un espace métrique complet et $A$ une partie de $E$. Alors $A$ est relativement compacte*[6] *si et seulement si $A$ est précompacte.* □

**Théorème 2.6 (d'Ascoli) :** *Soit $(E,d)$ un espace métrique compacte. Une partie de $\mathcal{C}(E)$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et équicontinue.*

*Démonstration.* '$\Longrightarrow$': Soit $\mathcal{H}$ une partie relativement compacte de $\mathcal{C}(E)$. $\mathcal{H}$ est evidemment bornée. Montrons qu'elle est équicontinue en $x_0 \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Par précompacité de $\mathcal{H}$ (cf. le théorème 2.5), il existe $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{H}$, tels que

$$\forall f \in \mathcal{H} \;\; \exists j \in \{1, \ldots, p\} \; : \; \|f - f_j\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3},$$

où $\|\cdot\|_{\sup}$ est la norme sup sur $E$.

Par continuité de $f_1, \ldots, f_p$ en $x_0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in E \;\; \forall j \in \{1, \ldots, p\} \; : \; d(y, x_0) < \delta \implies |f_j(y) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $f \in \mathcal{H}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\forall y \in E \; : \; \|f - f_j\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{3}$, alors

$$\begin{aligned} d(y, x_0) < \delta \implies |f(y) - f(x_0)| &\leq |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x_0)| + |f_j(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $f$ est équicontinue en $x_0$.

'$\Longleftarrow$': Soit $\mathcal{H}$ une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}(E)$. Comme $\mathcal{C}(E)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ est précompact. $\mathcal{H}$ étant équicontinue, on a pour tous $x \in E$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall y \in E \;\; \forall f \in \mathcal{H} \; : \; d(y, x) < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.2}$$

On a $E = \bigcup_{x \in E} \mathcal{B}(x, \delta_x)$ et comme $E$ est compact, il existe $x_1, \ldots, x_p$ tels que

$$E = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \mathcal{B}(x_i, \delta_{x_i}).$$

Soit $M := \sup\{\|f\|_\infty, \; f \in \mathcal{H}\}$ et posons $D = \{z \in \mathbb{C}, \; |z| \leq M\}$. Pour $f \in \mathcal{H}$, on pose

$$p(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_p)) \in D^p \subset \mathbb{C}^p.$$

L'ensemble $L = \{p(f), \; f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compact (et par théorème 2.5 précompact) et donc il existe $f_1, \ldots, f_q \in \mathcal{H}$ tels que

$$L \subset \bigcup_{1 \leq j \leq q} \mathcal{B}(p(f_j), \tfrac{\varepsilon}{3}),$$

où $\mathcal{B}((z_1, \ldots, z_p), r) = \Big\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p), \; \sup_{1 \leq f \leq p} |\lambda_j - z_j| < r\Big\}$.

[6] Rappel : $A$ est dite *relativement compacte* si $\overline{A}$ est compacte.

Soit $f \in \mathcal{H}$. Il existe $j_0$ tel que $p(f) \in \mathcal{B}(p(f_j), \frac{\varepsilon}{3}$, c'est-à-dire $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ :

$$|f(x_i) - f_{j_0}(x_i)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $x \in E$. Il existe $i_0$ tel que $d(x, x_{i_0}) < \delta_{x_{i_0}}$. D'après l'équation (2.2), il est vrai que $|f(x) - f(x_{i_0})| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f_{j_0}(x) - f_{j_0}(x_{i_0})| < \frac{\varepsilon}{3}$. D'où

$$\begin{aligned}|f(x) - f_{j_0}(x)| &\leq |f(x) - f(x_{i_0})| + |f(x_{i_0}) - f_{j_0}(x_{i_0})| + |f_{j_0}(x_{i_0}) - f_{j_0}(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon$ et on a $\mathcal{H} \subset \bigcup\limits_{1 \leq j \leq q} \mathcal{B}(f_j, \varepsilon)$, alors $\mathcal{H}$ est précompact. □

## 2.2. Opérateurs compacts

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. On note $\mathcal{B}_X$ la boule unité de $X$.

**Définition 2.7 :** Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On dit que $T$ *est compact* si $T(\mathcal{B}_X)$ est une partie relativement compacte de $Y$.

Remarque 2.8 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T$ est compact.

(ii) Pour toute partie bornée $B$ de $X$, $T(B)$ est relativement compacte.

(iii) Pour toute suite bornée $(x_n) \subset X$, la suite $T(x_n)$ admet une sous-suite extraite convergente.

Exemple : (i) Un opérateur de rang fini[7] est compact.

(Remarquons : Dans un espace de dimension finie, toute partie bornée est relativement compacte.)

(ii) Soit $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ avec $f \mapsto Tf$ où

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Opérateur de Volterra)}$$

avec $t \in [0,1]$. Soit $B_1$ la boule unité de $\mathcal{C}([0,1])$.

$$|(Tf)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |x|\,\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \implies T(B_1) \text{ est bornée}$$

Soit $f \in \mathcal{B}_1$. On a

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_\infty\,|x - y| \leq |x - y|\,.$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon$ tel que $|x - y| < \delta \implies |(Tf)(x) - (Tf)(y)| < \varepsilon$, d'où il s'ensuit que $T(B_1)$ est équicontinue, alors $T(B_1)$ est relativement compact et donc $T$ est compact.

[7] c'est-à-dire $\dim \operatorname{Im} T < \infty$

**Définition 2.9 :** On note $K(X,Y)$ *l'ensemble des opérateurs compacts de* $X$ *à* $Y$. Si $X = Y$, on note $K(X) = K(X,X)$.

**Proposition 2.10 :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Si* $T$ *est limite d'opérateurs compacts, alors il est compact.*

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $T_\varepsilon \in K(X,Y)$ tel que $\|T - T_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $T_\varepsilon(\mathcal{B}_X)$ est relativement compact, $\exists y_1, \dots, y_p \in Y$ tel que

$$T_\varepsilon(\mathcal{B}_X) \subset \bigcup_{1 \le j \le p} \mathcal{B}(y_j, \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $x \in \mathcal{B}_X$, il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\|T_\varepsilon(x) - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a

$$\|Tx - y_i\| \le \|Tx - T_\varepsilon x\| + \|T_\varepsilon x - y_i\| < \varepsilon \implies T(\mathcal{B}_X) \subset \bigcup_{1 \le j \le p} \mathcal{B}(y_j, \tfrac{\varepsilon}{2}),$$

donc $T(\mathcal{B}_X)$ est précompact. Comme $Y$ est complet, $T(\mathcal{B}_X)$ est relativement compact et donc $T$ est compact par remarque 2.8. $\square$

**Corollaire 2.11 :** *Si* $T$ *est limite d'opérateurs de rang fini, alors* $T$ *est compact.*

*Démonstration.* $T_n$ est de rang fini $\implies$ $T_n$ est compact. $\square$

**Corollaire 2.12 :** $K(X,Y)$ *est un sous-espace fermé de* $\mathcal{L}(X,Y)$.

*Démonstration.* Soient $T_1, T_2 \in K(X,Y)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)(\mathcal{B}_X) \subset \alpha T_1(\mathcal{B}_X) + \beta T_2(\mathcal{B}_X) \subset \overline{\alpha T_1(\mathcal{B}_X)} + \overline{\beta T_2(\mathcal{B}_X)}$$

ce qui est compact. Donc $(\alpha T_1 + \beta T_2)(\mathcal{B}_X)$ est relativement compact et il s'ensuit que $K(X,Y)$ est fermé d'après la proposition 2.10. $\square$

<u>Exemple</u> : Soit $(\lambda_n)$ une suite bornée et soit $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ avec $(x_n)_{n \ge 0} \mapsto (\lambda_n x_n)_{n \ge 0}$ l'opérateur diagonal. On a $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ et on a $\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|$.

Soit $T_k : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ avec $(x_n)_{n \ge 0} \mapsto (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k, 0, 0, \dots)$. $T_k$ est de rang fini et donc compact.

$T - T_k : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ avec $(x_n)_{n \ge 0} \mapsto (0, \dots, 0, \lambda_{k+1} x_{k+1}, \dots)$.

Puisque $\|T - T_k\| = \sup_{n \ge k+1} |\lambda_n|$ : Si $\lambda \to 0$ : $\|T - T_k\| \to 0$ et donc $T$ est compact.

**Proposition 2.13 :** *Soit* $R \in \mathcal{L}(W,X), T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *et* $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *où* $W$ *et* $Z$ *sont des espaces vectoriels normés. Si* $T$ *est compact, alors* $STR$ *est compact.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{B}_W$ la boule unité de $W$. On a

$$STR(\mathcal{B}_W) \subset ST(\mathcal{B}_X(0,\|R\|)) \subset S(T(\overline{\mathcal{B}_X(0,\|R\|)}))$$

Cela est compact comme l'image d'un compact[8] par une application continue. Alors $STR$ est relativement compact, donc compact. □

**Corollaire 2.14 :** *$K(X)$ est un idéal fermé de $\mathcal{L}(X)$.* □

Remarque 2.15 : (i) Soit $I$ l'application identité sur $X$. $I$ est compact si et seulement si $\dim X < +\infty$. (Conséquence du lemme de Riesz)

(ii) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ inversible. Si $T$ est compact, alors $\dim X$ et $\dim Y$ sont finies.

En effet : $TT^{-1} = I_X$ identité sur $X$. Si $I_X$ compact, alors $\dim X < \infty$. De même, si $T^{-1}T = I_Y$ est compact, alors $\dim Y < \infty$.

Exemple : Soit $T : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$ avec $f \mapsto Tf$ l'opérateur de Volterra, c'est-à-dire

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On a déjà vu que cet opérateur est compact sur $\mathcal{C}([0,1])$.[9] Pour $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ et $Tf \in \mathcal{C}([0,1])$ on pose $S : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ avec $f \mapsto Tf$. Pour $\|f\|_{\mathrm{L}^2} \leq 1$ on obtient

$$|(Sf)(x)| = |(Tf)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{x}\left(\int_0^x |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \implies \|Sf\|_\infty \leq 1.$$

Donc $S(\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{L}^2}})$ est bornée où $\mathcal{B}_{\mathrm{L}^2}$ est la boule unité dans $\mathrm{L}^2$. Puisque

$$|(Sf)(x) - (Sf)(y)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}\,,$$

on a que $S(\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{L}^2}})$ est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli 2.6, $S(\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{L}^2}})$ est relativement compact et donc $S$ est compact.

Maintenant on prend : $T : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$ avec $f \overset{S}{\mapsto} Tf \overset{i}{\mapsto} Tf$ où $i : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$. Donc $T = i \circ S$, alors $T$ est compact.

**Théorème 2.16 :** *Soient $X$ un espace de Banach, $H$ un espace de Hilbert et $T \in K(X,H)$. Alors $T$ est limite d'opérateurs de rangs finis.*

*Démonstration.* On a que $T(\overline{\mathcal{B}_X})$ est relativement compact. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 2.5 ils existent $y_1, \ldots, y_{N_\varepsilon} \in H$ tels que

$$T(\overline{\mathcal{B}_X}) \subset \bigcup_{1\leq i\leq N_\varepsilon} \mathcal{B}(y_i,\varepsilon). \tag{2.3}$$

[8] $T(\overline{\mathcal{B}_X(0,\|R\|)})$ est compact car $T$ est un opérateur compact.
[9] cf. exemple page 20.

Soit $F_\varepsilon$ le sous-espace vectoriel de $H$ engendré par $y_1, \ldots, y_{N_\varepsilon}$. $F_\varepsilon$ est de dimension finie. Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base orthonormée de $F_\varepsilon$, et

$$P_\varepsilon : H \to F_\varepsilon \qquad \text{avec} \qquad P_\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^{p} \langle y, e_i \rangle e_i$$

la projection orthogonale sur $F_\varepsilon$. Posons $T_\varepsilon = P_\varepsilon \circ T$. Puisque $\operatorname{Im} T_\varepsilon \subset \operatorname{Im} P_\varepsilon = F_\varepsilon$, $F_\varepsilon$ est de rang fini. Soit $x \in \overline{\mathcal{B}_X}$. On a

$$\begin{aligned} \|(T - T_\varepsilon)x\| = \|Tx - P_\varepsilon(Tx)\| &= \inf_{y \in F_\varepsilon} \|Tx - y\| \\ &\leq \inf_{1 \leq i \leq p} \|Tx - y_i\| < \varepsilon \qquad \text{(d'après l'equation (2.3))} \end{aligned}$$

Alors $\|T - T_\varepsilon\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T - T_\varepsilon)x\| \leq \varepsilon$. □

## 2.3. Opérateurs transposés (Opérateurs adjoints sur des espaces de Banach)

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Soit $T^t : Y' \to X'$ l'opérateur adjoint défini par

$$T^t(\varphi) : X \to \mathbb{K} \qquad \text{avec} \qquad x \mapsto \varphi(Tx)$$

pour tous $\varphi \in Y'$. Introduisons la notation suivante : $\forall x \in X, \varphi \in X'$ : $\varphi(x) = (x, \varphi)$.

$T^t$ est defini par la relation : $\underset{\in (Y,Y')}{(Tx, \varphi)} = \underset{\in (X,X')}{(x, T^t\varphi)}$.

On a les propriétés suivantes :

$$(ST)^t = T^t S^t \qquad\qquad (S+T)^t = S^t + T^t \qquad\qquad (\lambda T)^t = \lambda T^t$$

On a aussi $\|T\| = \|T^t\|$ car

$$\begin{aligned} \|T^t\| = \sup_{\substack{\varphi \in Y' \\ \|\varphi\| \leq 1}} \|T^t(\varphi)\| &= \sup_{\substack{\varphi \in Y' \\ \|\varphi\| \leq 1}} \sup_{\|x\| \leq 1} |(T^t\varphi)(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\substack{\varphi \in Y' \\ \|\varphi\| \leq 1}} |(T^t\varphi)(x)| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\substack{\varphi \in Y' \\ \|\varphi\| \leq 1}} |(\varphi T)(x)| \overset{(*)}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|, \end{aligned}$$

où l'égalité $(*)$ suit du théorème de Hahn-Banach.

**Théorème 2.17 :** *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors $T$ est compact si et seulement si $T^t$ est compact.*

*Démonstration.* '$\Longrightarrow$': Supposons $T$ compact. Soit $E = \overline{T(\overline{\mathcal{B}_X})}$, $E$ compact. Soit $(\varphi_n)$ une suite dans $\overline{\mathcal{B}_{Y'}}$. Montrons qu'il existe $(n_k)_k \nearrow$ telle que $\left(T^t(\varphi_{n_k})\right)_k$ converge.

Posons $\mathcal{F} = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où $f_n : E \to \mathbb{K}$ avec $y \mapsto \varphi_n(y)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ :

$$|f_n(y)| = |\varphi_n(y)| \leq \|\varphi\| \, \|y\| \leq \sup_{y \in E} \|y\| =: C$$

ce qui est fini car $E$ compact. Alors $\|f_n\|_\infty = \sup_{y\in E} |f_n(y)| \leq C$. Donc $\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{C}(E)$. De plus

$$\forall x, y \in E\ :\ |f_n(x) - f_n(y)| = |\varphi_n(x-y)| \leq \|\varphi_n\| \, \|x-y\| \leq \|x-y\|$$

d'où $\mathcal{F}$ est équicontinue. Donc d'après le théorème d'Ascoli 2.6, $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(E)$. Par remarque 2.8, il existe $(n_k)_k \nearrow$ telle que $(f_{n_k})_k$ converge dans $\mathcal{C}(E)$ et elle est donc une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}(E)$. C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, l \geq N\ :\ \|f_{n_k} - f_{n_l}\| < \varepsilon \implies \sup_{y\in E} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k, l \geq N\ :\ \sup_{\|x\|\leq 1} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_l})(Tx)| &\leq \sup_{y\in E} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_l})(y)| < \varepsilon \\
\implies \sup \left\|T^t(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_l})(x)\right\| &< \varepsilon \\
\implies \left\|T^t(\varphi_{n_k}) - T^t(\varphi_{n_l})\right\| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $(T^t(\varphi_{n_k}))$ est une suite de Cauchy est alors converge.

'$\Longleftarrow$': Supposons que $T^t$ soit compact. D'après ce qui précède, on a que $(T^t)^t : X'' \to Y''$ est compact.

Soit $\imath : X \to X''$ avec $x \mapsto \imath_x$ où $\imath_x : X' \to \mathbb{K}$ avec $\varphi \mapsto \varphi(x)$ l'inclusion canonique de $X$ dans $X''$. $\imath$ est une isométrie linéaire, en effet

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|\leq 1 \\ \varphi \in X'}} \|\varphi(x)\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|\leq 1 \\ \varphi \in X'}} \|\imath_x(\varphi)\| = \|\imath_x\|\,.$$

De plus, on a $(T^t)^t \circ \imath = \imath \circ T$, car pour $\varphi \in Y'$ :

$$(T^t)^t(\imath_x(\varphi)) = \imath(T^t(\varphi)) = (T^t\varphi)(x) = \varphi(Tx) = \imath_{Tx}(\varphi).$$

En identifiant $x$ et $\imath_x$, on peut identifier $X$ avec $\imath(X)$, le sous-espace vectoriel de $X''$. On obtient : $(T^t)^t\big|_X = T$, alors $T$ est compact. □

Remarque 2.18 : Soit $H$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $T$ est compact si et seulement si $T^*$ est compact.

## 2.4. Théorie spectrale des opérateurs compacts

Soit $X$ un espace de Banach et $K(X)$ l'ensemble des opérateurs compacts sur $X$.

**Lemme 2.19 :** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $X$ de dimension finie. Alors, il existe un sous-espace fermé $M$ de $X$, tel que $X = F \oplus M$.*

*Démonstration.* Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de $F$ et soient $e_i^*\ :\ F \to X$ avec $\sum_{1\leq i\leq p} x_i e_i \mapsto x_i$ une forme linéaire sur $F$. D'après le théorème de Hahn-Banach $e_i^*$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $X$ entier. On notera le prolongement aussi par $e_i^*$.

Soit
$$P \in \mathcal{L}(X) \qquad \text{avec} \quad x \mapsto \sum_{1\le i\le p} e_i^*(x)e_i \qquad \text{où} \quad P^2 = P \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} P = F$$
et soit $M = \ker F$ ce qui est un sous-espace fermé[10] de $X$. Donc pour $x \in X$, on a
$$x = \underbrace{P(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - P(x))}_{\in \ker P} \implies X = F + M.$$
Maintenant soit $y \in F \cap M$. Donc d'un côté $y = P(x)$ et $P(y) = P^2(x) = P(x)$, de l'autre $P(y) = 0 \implies P(x) = 0 \implies y = 0 \implies F \cap M = \{0\}$. D'où $X = F \oplus M$. □

**Lemme 2.20 :** *Soit $G$ un sous-espace fermé de $X$, $G \subsetneq X$. Alors il existe $z \in X$ avec $\|z\| = 1$ tel que $\forall y \in G$ : $\|z - y\| \geq \frac{1}{2}$.*

*Démonstration.* Soit $\varphi \in X'$, $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi = 0$ sur $G$ ce qui existe comme conséquence du théorème de Hahn-Banach. Il existe $z \in X$ avec $\|z\| = 1$ tel que $|\varphi(z)| \geq \frac{1}{2}$.

Alors, on a $\forall y \in G$ : $\|z - y\| \geq |\varphi(z - y)| \geq |\varphi(z)| - \underbrace{|\varphi(y)|}_{=0} \geq \frac{1}{2}$. □

**Théorème 2.21 :** *Soient $T \in K(X)$ et $\lambda \neq 0$. Alors*

*(1)* $\forall n \geq 1$ : $\ker(\lambda I - T)^n$ *est de dimensions finie.*

*(2)* $\forall n \geq 1$ : $\operatorname{Im}(\lambda I - T)^n$ *est fermé.*

*(3)* $\exists n_0 \geq 1$ *tel que* $\forall k \geq 0$ : $\operatorname{Im}(\lambda I - T)^{n_0} = \operatorname{Im}(\lambda I - T)^{n_0+k}$.

*Démonstration.* (1) $(\lambda I - T)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \lambda^k T^{n-k} = \lambda^n I + TA$ avec $A \in \mathcal{L}(X)$. Sur $\ker(\lambda I - T)^n$ on a
$$\begin{aligned} (\lambda I - T)^n = 0 \implies \lambda^n I + TA = 0 \implies I &= \frac{1}{\lambda^n} TA \\ \implies I\big|_{\ker(\lambda I - T)^n} &= \underbrace{-\frac{1}{\lambda^n} TA}_{\text{compact}}\big|_{\ker(\lambda I - T)^n} \end{aligned}$$
Donc $\dim \ker(\lambda I - T)^n < \infty$ par la remarque 2.15.

(2) Soit $n = 1$. D'après le lemme 2.19, il existe $M$ sous-espace vectoriel fermé de $X$ tel que $X = \ker(\lambda I - T) \oplus M$. On a que $(\lambda I - T)\big|_M$ est injectif et de plus
$$(\lambda I - T)(X) = (\lambda I - T)(M).$$
Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in M$ : $\|(\lambda I - T)x\| > \delta \|x\|$.

Par l'absurde, supposons que cela ne soit pas le cas. Alors il existe $(x_n) \subset M$ avec $\|x_n\| = 1$ telle que $(\lambda I - T)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Posons $y_n = \lambda x_n - T x_n$. On a $y_n \to 0$.

[10] en tant que l'image réciproque du fermé $\{0\}$ sous une application continue

Puisque $T$ est compact, il existe $(n_k) \nearrow$ telle que $T(x_{n_k})$ converge. Soit $y = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k}$. Alors

$$x_{n_k} = \tfrac{1}{\lambda}(y_{n_k} - Tx_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \tfrac{1}{\lambda}y.$$

Comme $T$ est continue, on a aussi $Tx_{n_k} \to T(\frac{y}{\lambda})$. On obtient $y = T(\frac{y}{\lambda})$. Il s'ensuit d'un part $\lambda y - Ty = 0 \implies y \in \ker(\lambda I - T)$. D'autre part on a $x_{n_k} \to \frac{y}{\lambda}$ et $\forall k$ : $x_{n_k} \in M$ ce qui est fermé, donc $y \in M$.

Alors $y \in \ker(\lambda I - T) \cap M \implies y = 0$. Or pour tous $k$ : $\|x_{n_k}\| = 1$ et $x_{n_k} \to \frac{y}{\lambda}$, donc $\left\|\frac{y}{\lambda}\right\| = 1$ ce qui est absurde.

Donc il existe $\delta > 0$ tel que $\|(\lambda I - T)x\| > \delta \|x\|$ pour tous $x \in M$. Alors $(\lambda I - T)(M)$ est fermé.

Soit $n \geq k$. On fait ensuite en raisonnement par récurrence. On écrit

$$(\lambda I - T)^n(X) = (\lambda I - T)\left((\lambda I - T)^{n-1}(X)\right)$$

et on applique le cas précédent à $(\lambda I - T)\big|_{(\lambda I - T)^{n-1}(X)}$.

(3) On a pour tous $n$ : $G_{n+1} \subset G_n$ avec $G_n = \operatorname{Im}(\lambda I - T)^n$.

Supposons que $G_{n+1} \neq G_n$ pour tous $n$. D'après lemme 2.20, on a $\forall n\ \exists z_n \in G_n$ avec $\|z_n\| = 1$ tel que $\forall y \in G_{n+1}$ : $\|z_n - y\| \geq \frac{1}{2}$. Pour $k \geq 1$, on pose

$$z_{n,k} := z_n - z_{n+k} - \tfrac{1}{\lambda}(\lambda I - T)(z_n - z_{n+k}).$$

On a : $z_{n+k} \in G_{n+k} \subset G_{n+1}$ et $z_n - z_{n+k} \in G_n \implies (\lambda I - T)(z_n - z_{n+k}) \in G_{n+1}$. Donc $\|z_{n,k}\| = \|z_n - y\| \geq \frac{1}{2}$ où $y = z_{n+k} + \frac{1}{\lambda}(\lambda I - T)(z_n - z_{n+k}) \in G_{n+1}$.

Or $z_{n,k} = \frac{T}{\lambda}(z_n - z_{n+k}) \implies \|Tz_n - Tz_{n+k}\| = \|\lambda z_{n,k}\| \geq \frac{|\lambda|}{2}$, donc aucune sous-suite extraite de $(Tz_n)$ n'est de Cauchy, et alors $(Tz_n)$ n'a pas de sous-suite convergente ce qui contredit l'hypothèse de $T$ compact et $(z_n)$ bornée.

Donc il existe $n_0$ tel que $G_{n_0} = G_{n_0+1} \iff \operatorname{Im}(\lambda I - T)^{n_0} = \operatorname{Im}(\lambda I - T)^{n_0+1}$. Puisque

$$(\lambda I - T)(G_{n_0}) = (\lambda I - T)(G_{n_0+1}) \iff G_{n_0+1} = G_{n_0+2}$$

on obtient le résultat par récurrence. $\square$

**Définition 2.22 :** (i) Si $F \subset X$ : $F^\perp := \{\varphi \in X',\ \varphi(x) = 0\ \forall x \in F\}$.

(ii) Si $W \subset X'$ : ${}^\perp W := \{x \in X,\ \varphi(x) = 0\ \forall \varphi \in W\}$.

**Lemme 2.23 :** *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Alors $\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^\perp$ et $\ker T = {}^\perp(\operatorname{Im} T^t)$.*

*Démonstration.* $\varphi \in \ker T^t \iff T^t\varphi = 0 \iff \forall x \in X$ : $(T^t\varphi)(x) = 0 \iff \forall x \in X$ : $\varphi(Tx) = 0 \iff \varphi \in (\operatorname{Im} T)^\perp$.

$x \in {}^\perp(\operatorname{Im} T^t) \iff \forall \psi \in \operatorname{Im} T^t$ : $\psi(x) = 0 \iff \forall \varphi \in Y'$ : $T^t(\varphi)(x) = 0 \iff \forall \varphi \in Y'$ : $\varphi(Tx) = 0 \iff Tx = 0 \iff x \in \ker T$. $\square$

**Théorème 2.24 :** *Soient $X$ un espace de Banach, $T \in K(X)$ et $\lambda \neq 0$. Alors*

$$\operatorname{Im}(\lambda I - T) = X \iff \ker(\lambda I - T) = \{0\}.$$

*Démonstration.* '$\Longleftarrow$': Supposons $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$. On a vu qu'il existe $n_0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda I - T)^{n_0} = \operatorname{Im}(\lambda I - T)^{n_0+1}$ (cf. théorème 2.21).

Donc $\forall y \in X \ \exists x \in X$ tel que $(\lambda I - T)^{n_0} y = (\lambda I - T)^{n_0+1} x$.

On sait : Si $\lambda I - T$ injectif, alors $(\lambda I - T)^{n_0}$ injectif. On obtient donc $y = (\lambda I - T)x$ d'où $\operatorname{Im}(\lambda I - T) = X$.

'$\Longrightarrow$': Suppsons que $\lambda I - T$ surjectif. On a $T^t \in K(X')$ et

$$\ker(\lambda I - T^t) = \ker\left((\lambda I - T)^t\right) = \operatorname{Im}(\lambda I - T)^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}.$$

D'après la première implication, on a $\operatorname{Im}(\lambda I - T^t) = X'$ (car $T$ compact et $\lambda \neq 0$. On a donc

$$\ker(\lambda I - T) = {}^{\perp}\operatorname{Im}(\lambda I - T^t) = {}^{\perp}X' = \{0\}.$$ □

<u>Remarque 2.25</u> : (i) Si $T \in K(X)$, $\lambda \neq 0$ :

$$(\lambda I - T) \text{ injectif } \iff (\lambda I - T) \text{ surjectif } \iff (\lambda I - T) \text{ inversible.}$$

(ii) (Alternative de Fredholm)

Soit $T \in K(X)$, $\lambda \neq 0$. Alors, soit $\lambda x - Tx = 0$ admet une infinité de solutions, soit $\forall y \in X$ : $\lambda x - Tx = y$ admet une unique solution.

**Théorème 2.26 :** *Soit $T \in K(X)$.*

*(1) Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, alors $\lambda$ est une valeur propre de $T$ et $\dim \ker(\lambda I - T) < \infty$.*

*(2) Si $\dim X = \infty$, alors $0 \in \sigma(T)$.*

*(3) $\sigma(T)$ est au plus dénombrable. Si $\sigma(T)$ n'est pas fini, alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où $(\lambda_n)_n$ est une suite convergente vers 0.*

*Démonstration.* (1) Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. On a $\lambda I - T$ n'est pas inversible et il suit que $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$, et donc $\lambda \in \sigma_p(T)$. D'après le théorème 2.21 : $\dim \ker(\lambda I - T) < \infty$.

(2) On a déjà vu que si $\dim X = \infty$ et $T$ est compact, alors $T$ n'est pas inversible (cf. remarque 2.15). Donc $0 \in \sigma(T)$.

(3) Il suffit de montrer que $\forall \delta > 0$ : $\sigma(T) \cap \{\lambda,\ |\lambda| > \delta\}$ est fini. Alors supposons le contraire : $\exists \delta > 0$ : $\sigma(T) \cap \{\lambda,\ |\lambda| > \delta\}$ est infini.

Soit $(\lambda_n)$ une suite dans $\sigma(T) \cap \{\lambda,\ |\lambda| > \delta\}$ avec $\forall n \neq m$ : $\lambda_n \neq \lambda_m$. Pour tout $n$ : $\lambda_n$ est une valeur propre de $T$ (d'après (1)) et donc il existe $e_n \in X$, $e_n \neq 0$ tel que $Te_n = \lambda_n e_n$. La famille $\{e_n\}_n$ est par hypothèse une famille libre. En effet, on montre par récurrence sur $p$ que $\{e_n,\ n \leq p\}$ est libre :

$p = 0$ : $\{e_0\}$ est libre.

$p \geq 0$ : On veux montrer que $\alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_{p+1} e_{p+1} = 0 \implies \alpha_0 = \cdots = \alpha_{p+1} = 0$.

Alors soit

$$\alpha_0 e_0 + \cdots + \alpha_{p+1} e_{p+1} = 0 \tag{2.4}$$

$$\iff \alpha_0 \lambda_{p+1} e_0 + \cdots + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} e_{p+1} = 0 \tag{2.5}$$

En appliquant $T$ à l'équation (2.4), on obtient

$$\alpha_0 \lambda_0 e_0 + \cdots + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} e_{p+1} = 0. \tag{2.6}$$

et on soustrait (2.6) de (2.5) ce qu'il mène à

$$\alpha_0(\lambda_{p+1} - \lambda_0)e_0 + \alpha_1(\lambda_{p+1} - \lambda_1)e_1 + \cdots + \alpha_p(\lambda_{p+1} - \lambda_p)e_p = 0$$

Par hypothèse $\alpha_i(\lambda_{p+1} - \lambda_i) = 0 \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Donc $\alpha_{p+1} = 0$.

On a obtenu que $\{e_n\}$ est une famille libre. Soit $E_n = \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_n\}$ la sous-espace vectoriel de $X$ engendré par $\{e_0, \ldots, e_n\}$.

On a $E_n \subsetneq E_{n+1}$ où $E_n$ est fermé et $T(E_n) \subset E_n$. De plus $(\lambda_n I - T)(E_n) = E_{n-1}$. Comme $E_{n-1} \subsetneq E_n$, il existe $z_n \in E_n$, $\|z_n\| = 1$ tel que $\forall x \in E_{n-1}$ : $\|z_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ (d'après lemme 2.20).

Pour $n > m$ :, on pose $z_{n,m} = z_n - \frac{1}{\lambda_n} T z_n + \frac{1}{\lambda_m} T z_m$. On a

$$z_{n,m} = \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n I - T)z_n}_{\in E_{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{\lambda_m} T z_m}_{\in E_m \subset E_{n-1}} \implies z_{n,m} \in E_{n-1}.$$

Donc $\|z_{n,m} - z_n\| \geq \dfrac{1}{2} \implies \left\| \frac{1}{\lambda_n} T z_n - \frac{1}{\lambda_m} T z_m \right\| \geq \dfrac{1}{2} \implies \left\| T\left(\dfrac{z_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\dfrac{z_m}{\lambda_m}\right) \right\| \geq \dfrac{1}{2}$.

D'autre part on a $\forall n$ : $\left\| \dfrac{z_n}{\lambda_n} \right\| = \dfrac{1}{|\lambda_n|} \leq \dfrac{1}{\delta}$.

Donc il s'ensuit que $\left(T\left(\frac{z_n}{\lambda_n}\right)\right)$ n'admet pas de sous-suite extraite convergente ce qui contredit $T$ compact et $\left(\frac{z_n}{\lambda_n}\right)$ bornée. □

Exemple : Soit $T$ : $\mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1])$ avec $f \mapsto Tf$ où $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ l'opérateur de Volterra. On a déjà vue que $T$ est compact.[11]

Soit $\lambda \neq 0$ et $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ telle que $Tf = \lambda f$. Il suit $\forall x \in [0,1]$ : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$. Comme $Tf$ est continue, $f$ est continue et donc $Tf \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On dérive

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \lambda f'(x) \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} f \equiv 0 \implies \text{Si } \lambda \neq 0 : \ \lambda \notin \sigma_p(T).$$

Comme $T$ est compact : $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} = \emptyset$ et puisque $\mathrm{L}^2([0,1])$ est du dimension infinie, il suit $0 \in \sigma(T)$ (cf. théorème 2.26). Donc $\sigma(T) = \{0\}$.

[11] cf. page 22

## 2.5. Diagonalisation d'un opérateur normal et compact

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

**Théorème 2.27 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ compact et normal. Alors $H$ possède une base orthonormée, formée des vecteurs propres de $T$.*

*Démonstration.* Si $H \neq \{0\}$, alors il existe $\lambda \in \sigma_p(T)$ tel que $|\lambda| = \|T\|$ :

D'après la proposition précédente (1.42) on a $r(T) = \|T\|$ et il existe $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = r(T) = \|T\|$ (par définition du rayon spectral et du fait que le spectre est fermé). Si $T \neq 0$, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ et $T$ compact, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$. Si $T = 0$, alors $\lambda = 0$ est valeur propre de $T$.

Maintenant, on pose $E_\lambda = \ker(\lambda I - T)$. On a vu que les $E_\lambda$ sont deux à deux orthogornaux[12]. Posons

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)}} E_\lambda .$$

ce qui est invariant par $T$ et $T^*$. En effet tous les $E_\lambda$ sont déjà invariant par $T$ et $T^*$ : Soit $x \in E_\lambda$. Alors

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)Tx = T(\lambda I - T)x = 0 &\implies Tx \in E_\lambda \\ (\lambda I - T)T^*x = T^*(\lambda I - T)x = 0 &\implies T^*x \in E_\lambda \end{aligned}$$

Donc $E$ invariant par $T$ et $T^*$. Il suit $E^\perp$ est aussi invariant par $T$ et $T^*$ : Soit $x \in E^\perp$, $y \in E$. Alors $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$ car $T^*y \in E$. Donc $Tx \in E^\perp$. De même, on a $T^*(E^\perp) = E^\perp$.

On a

$$\left(T\big|_{E^\perp}\right)^* = T^*\big|_{E^\perp}$$

et $T\big|_{E^\perp}$ est normal et compact. $T\big|_{E^\perp}$ n'a pas de valeur propre :

Si pour $x \in E^\perp$ : $T\big|_{E^\perp} x = \lambda x$, alors $x \in E_\lambda$ et $x \in E^\perp \implies x = 0$. Donc, d'après la première partie de cette preuve, on a $E^\perp = \{0\}$ et donc $E$ est dense dans $H$.

Pour $\lambda \in \sigma_p(T)$ soit $(e_i^\lambda)_{i \in I_\lambda}$ une base orthonormée de $E_\lambda$. Comme les $E_\lambda$ sont deux à deux orthogonaux, $\{(e_i^\lambda)_{i\in I_\lambda},\ \lambda \in \sigma_p(T)\}$ est une famille orthonormée. Comme $E$ est dense dans $H$, $\operatorname{span}\{(e_i^\lambda)_{i\in I_\lambda},\ \lambda \in \sigma_p(T)\}$ est dense dans $H$.[13]

Donc $(e_i^\lambda)_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ i \in I_\lambda}}$ est une base orthonormée de $H$. □

[12]cf. théorème 1.40

[13] $\{(e_i^\lambda)_{i\in I_\lambda},\ \lambda \in \sigma_p(T)\}$ s'appelle *une famille totale.*

# 3. Calcul fonctionnel

## 3.1. Calcul fonctionnel polynômial et rationnel

Soit $E$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On pose $P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$.

**Proposition 3.1 :** *L'application* $\Phi_T : \mathbb{C}[X] \to \mathcal{L}(E)$ *avec* $P \mapsto P(T)$ *est un morphisme d'algèbres unitaires, c'est-à-dire*

*(i)* $\Phi_T(1) = I \in \mathcal{L}(E)$.

*(ii)* $\Phi_T$ *est linéaire.*

*(iii)* $\Phi_T(PQ) = \Phi_T(P)\Phi_T(Q)$.

*De plus, on a pour tout* $P \in \mathbb{C}[X]$ : $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) := \{P(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

*Démonstration.* $\Phi_T$ est un morphisme d'algèbres unitaires (trivial).

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrons que $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

  $$P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda)Q(X) \in \mathbb{C}[X] \implies P(T) - P(\lambda)I = (T - \lambda I)Q(T) \in \mathcal{L}(E).$$

  Si $P(T) - P(\lambda)I$ est inversible, alors $(T - \lambda I)$ est inversible.

  Donc si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$. D'où $P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T))$.

- Soit $\mu \in \sigma(P(T))$. On a

  $$P(X) - \mu = \alpha(X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_p) \implies P(T) - \mu I = \alpha(T + \lambda_1 I)\cdots(T + \lambda_p I).$$

  $P(T) - \mu I$ non inversible $\implies$ $\exists i$ tel que $T - \lambda_i I$ non inversible $\implies$ $\exists i$ tel que $\lambda_i \in \sigma(T)$. On a $\mu = P(\lambda_i) \in \mathbb{C}[X] \implies \mu \in P(\sigma(T))$. D'où $\sigma(P(T)) \subset P(\sigma(T))$. $\square$

Remarque 3.2 : On note par $\mathcal{R}_{\sigma(T)}$ l'ensemble des fractions rationnelles dont les pôles sont dans $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Alors pour $f \in \mathcal{R}_{\sigma(T)}$, $f = \frac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on a que $Q$ ne s'annule pas sur $\sigma(T)$.

Puisque $Q(\sigma(T)) = \sigma(Q(T))$, on obtient si $0 \notin \sigma(Q(T))$, alors $Q(T)$ inversible.

On pose $f(T) = P(T)Q(T)^{-1}$, ce qui est bien défini : Soit $f = \dfrac{P_1}{Q_1}$ avec $P_1, Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $Q_1$ ne s'annule pas sur $\sigma(T)$. Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \implies PQ_1 = P_1 Q &\implies P(T)Q_1(T) = P_1(T)Q(T) \\ &\implies P(T)Q(T)^{-1} = P_1(T)Q_1(T)^{-1} \end{aligned}$$

parce que les opérateurs commutent.

**Proposition 3.3 :** *On a les propriétés suivantes*

*(i) L'application* $\mathcal{R}_{\sigma(T)} \to \mathcal{L}(E)$ *avec* $f \mapsto f(T)$ *est linéaire.*

*(ii) Pour tout* $f, g \in \mathcal{R}_{\sigma(T)}$ *on a* $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

*(iii) Pour tout* $f \in \mathcal{R}_{\sigma(T)}$ *on a* $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

*Démonstration.* (iii) Soit $\lambda \in \sigma(T)$, $f = \frac{P}{Q}$ où $Q$ ne s'annule par sur $\sigma(T)$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(\lambda) &= \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = \frac{Q(\lambda)P(x) - P(\lambda)Q(x)}{Q(\lambda)Q(x)} \\ &= \frac{(x-\lambda)R(X)}{Q(\lambda)Q(x)} \qquad\qquad R \in \mathbb{C}[X] \\ \implies f(T) - f(\lambda)I &= (T - \lambda I)R(T)Q(T)^{-1} \end{aligned}$$

Si $(T - \lambda I)$ non inversible, alors $f(T) - f(\lambda)I$ non inversible et donc pour $\lambda \in \sigma(T)$ :

$$f(\lambda) \in \sigma(f(T)) \implies f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T).$$

Réciproquement, soit $\mu \in \sigma(f(T))$.

$$\begin{aligned} f(x) - \mu &= \frac{P(x) - \mu Q(x)}{Q(x)} = \alpha \frac{(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_p)}{Q(X)} \\ \implies f(T) - \mu I &= \alpha(T - \lambda_1 I)\cdots(T - \lambda_p T)Q(T)^{-1} \end{aligned}$$

Alors, si $f(T) - \mu I$ non inversible, alors il existe $i$ tel que $(T - \lambda_i I)$ non inversible. Il suit pour $\mu = f(\lambda_i) \in f(\sigma(T)$ : $\sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$. □

## 3.2. Calcul fonctionnel continu pour les opérateurs autoadjoints

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a

$$P(T)^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}(T^*)^k.$$

Donc, si $T$ normal, alors $P(T)$ normal.

**Lemme 3.4 :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *normal. Alors pour* $P \in \mathbb{C}[X]$, *on a* $\|P(T)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |P(\lambda)|$.

*Démonstration.* Soit $P(T)$ normal. Alors

$$\|P(T)\| = r(P(T)) \implies \|P(T)\| = \sup_{w\in\sigma(P(T))} |w|.$$

Or, on a vu que $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) \implies \|P(T)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |P(\lambda)|$ .[14] □

[14]cf. proposition 3.1

**Théorème 3.5 (de calcul fonctionnel pour les opérateurs autoadjoints) :** *Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. Alors, il existe un unique morphisme continu d'algèbres unitaires*

$$\Phi_T \,:\, \mathcal{C}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H) \qquad \textit{tel que} \qquad \Phi_T(i_{\sigma(T)}) = T$$

*où $i_{\sigma(T)}$ est l'identité sur $\sigma(T)$.*

*Pour $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, on pose $f(T) = \Phi_T(f)$. On a les propriétés suivantes :*

*(i) $\Phi_T$ est isométrique de $(\mathcal{C}(\sigma(T)), \|\cdot\|_\infty)$ dans $\mathcal{L}(H)$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme* sup *sur $\sigma(T)$.*

*(ii) Pour toutes $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, on a $f(T)^* = \bar{f}(T)$ et $f(T)$ normal.*

*(iii) Si $S \in \mathcal{L}(H)$ et $ST = TS$, alors $Sf(T) = f(T)S$.*

*(iv) Pour toutes $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, on a $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.*

*(v) Si $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ avec $f$ réelle et si $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(T))$, alors $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.*

*Démonstration.* $T$ autoadjoint, donc $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Soit

$$\mathcal{P}_{\sigma(T)} = \{P\big|_{\sigma(T)} \,:\, \sigma(T) \to \mathbb{C},\ P \in \mathbb{C}[X]\}$$

l'ensemble des polynômes de $\sigma(T)$ dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Stone-Weierstraß, $\mathcal{P}_{\sigma(T)}$ est dense dans $\mathcal{C}(\sigma(T))$ pour la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\sigma(T)} |f(x)|$.

Posons $\Phi_T(P\big|_{\sigma(T)}) = P(T)$. ce qui ne dépend que de $P\big|_{\sigma(T)}$ car si $P\big|_{\sigma(T)} = Q\big|_{\sigma(T)}$, on a

$$\|P(T) = Q(T)\|_\infty = \sup_{\sigma(T)} |P - Q| = 0 \implies P(T) = Q(T).$$

Remarquons : Si $\sigma(T)$ est infini, alors $P\big|_{\sigma(T)} = Q\big|_{\sigma(T)} \implies P = Q$.

$\Phi_T \,:\, P\big|_{\sigma(T)} \to \mathcal{L}(H)$ est une application linéaire isométrique (cf. ci-dessous), en particulier $\Phi_T$ est continue. Comme $P\big|_{\sigma(T)}$ est dense dans $\mathcal{C}(\sigma(T))$, $\Phi_T$ se prolonge en une application linéaire isométrique de $\mathcal{C}(\sigma(T))$ dans $\mathcal{L}(H)$. On notéra ce prolongement par $\Phi_T$ :

Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, alors il existe $(P_n) \subset \mathbb{C}[X]$ tel que $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ sur $\sigma(T)$. On a

$$\|P_n(T) - P_m(T)\| = \|P_n - P_m\|_\infty ,$$

et donc $(P_n(T))$ est une suite de Cauchy et alors converge. On obtient $f(T) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(T)$.

(i) Isométrie : $\|\Phi_T(f)\| = \|f(T)\| = \lim \|P_n(T)\| = \lim \|P_n\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Montrons que pour $f, g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ : $\Phi_T(fg) = \Phi_T(f)\Phi_T(g)$.

Alors pour $f, g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ $\exists P_n, Q_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour $n \to \infty$ : $\|P_n - f\|_\infty \to 0$ et $\|Q_n - g\|_\infty \to 0$.

On a $f(T) = \lim P_n(T)$, $g(T) = \lim Q_n(T)$ et $(fg)(T) = \lim(P_nQ_n)(T)$. Donc on obtient $(fg)(T) = \lim(P_nQ_n)(T) = \lim P_n(T)Q_n(T) = f(T)g(T)$ et alors $\Phi_T$ est linéaire. On a aussi $\Phi_T(1) = I$.

Maintenant, on montre l'unicité : Soit $\Psi : \mathcal{C}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ un deuxième morphisme continu d'algèbres unitaires tel que $\Psi(i_{\sigma(T)}) = T$.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $P\big|_{\sigma(T)} = \sum_{k=0}^{n} a_k i_{\sigma(T)}^k$. Alors

$$\begin{aligned}
&\Psi(P|_{\sigma(T)}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Psi(i_{\sigma(T)}^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Psi(i_{\sigma(T)})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k \\
\implies &\Psi(P\big|_{\sigma(T)}) = \Phi_T(P\big|_{\sigma(T)}).
\end{aligned}$$

Comme les deux morphismes sont continus et conincident sur un ensemble dense, on a $\Psi = \Phi_T$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Alors il existe une suite $(P_n)_n$ telle que $\|f - P_n\|_\infty \to 0$ et donc $\left\|\overline{f} - \overline{P_n}\right\|_\infty \to 0$.

Soit $P_n = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \implies \overline{P_n} = \sum_{k=0}^{N} \overline{a_k} X^k \qquad$ pour $x \in \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Puisque $T = T^*$, on a

$$\overline{P_n}(T) = \sum_{k=0}^{N} \overline{a_k} T^k = \left( \sum_{k=0}^{N} a_k T^k \right)^* = P(T)^*.$$

On obtient finalement : $\overline{f}(T) = \lim \overline{P_n}(T) = \lim P_n(T)^* = f(T)^*$.

$f(T)$ est normal car $f(T)f^*(T) = f(T)\overline{f}(T) = (f\overline{f})(T) = (\overline{f}f)(T) = f^*(T)f(T)$.

(iii) Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ avec $ST = TS$ et soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Alors il existe $(P_n) \subset \mathbb{C}[X]$ telle que $\|P_n - f\|_\infty \to 0$. Alors

$$SP_n(T) = P_n(T)S \xrightarrow{n \to \infty} Sf(T) = f(T)S.$$

(iv) Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. On veux montrer que $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Premièrement, soit $\mu \notin f(\sigma(T))$. Soit $g = \frac{1}{f-\mu} \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ ce qui est bien définie car $f - \mu$ ne s'annule pas sur $\sigma(T)$. Puisque

$$(f - \mu)g = g(f - \mu) = 1 \implies (f(T) - \mu I)g(T) = g(T)(f(T) - \mu I) = I,$$

alors $(f(T) - \mu I)$ inversible et il s'ensuit $\mu \notin \sigma(f(T)) \implies \sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$. Réciproquement, soit $\lambda \in \sigma(T)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors il suit d'après proposition 3.1 que $P(\lambda) \in P(\sigma(T)) = \sigma(P(T))$. On a

$$\begin{aligned}
\|(f(T) - f(\lambda)I) - (P(T) - P(\lambda)I)\| &= \|(f - f(\lambda)) - (P - P(\lambda))\|_\infty \\
&\leq \|f - P\|_\infty + |f(\lambda) - P(\lambda)| \leq 2\|f - P\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Supposons que $f(T) - f(\lambda)I$ soit inversible. Comme $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(H))$ est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{B}\big(f(T) - f(\lambda)I, \varepsilon\big) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(H)).$$

En outre, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après l'équation (3.1), on a

$$\|f(T) - f(\lambda)I - (P(T) - P(\lambda)I)\| \leq 2\tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies P(T) - P(\lambda)I \subset \mathcal{B}\big(f(T) - f(\lambda)I, \varepsilon\big)$$

et alors $P(T) - P(\lambda)I$ est inversible en contradiction à $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$.

Donc $f(T) - f(\lambda)I$ n'est pas inversible et alors $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$.

D'où $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$.

(v) Soit $f : \sigma(T) \to \mathbb{R}$ continue et réelle. On a $f(T)^* = \bar{f}(T) = f(T)$ et donc $f(T)$ autoadjoint. Donc, pour $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(T)))$ on peut définir $g(f(T))$ :

Soit $\chi : \mathcal{C}(f(\sigma(T))) \to \mathcal{C}(\sigma(T))$ avec $g \mapsto g \circ f$ et soit $\Phi_{f(T)} : \mathcal{C}(f(\sigma(T))) \to \mathcal{L}(H)$ avec $g \mapsto g(f(H))$. Alors on pose $\Phi_T \circ \chi : \mathcal{C}(f(\sigma(T))) \to \mathcal{L}(H)$, où $\Phi_{f(T)}$ et $\Phi_T \circ X$ sont deux morphismes d'algèbres unitaires. On a

$$(\Phi_T \circ \chi)(i_{\sigma(T)}) = \Phi_T(f) = f(T) \implies \Phi_T \circ \chi = \Phi_{f(T)}$$

et donc l'unicité et on en déduit pour toutes $g \in \mathcal{C}(f(\sigma(T)))$ :

$$(\Phi_T \circ \chi)(g) = \Phi_{f(T)}(g) \implies (g \circ f)(T) = g(f(T)).$$

□

<u>Exemple</u> : Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et définissons

$$M_\varphi : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \mathrm{L}^2([0,1]) \qquad \text{avec} \qquad f \mapsto \varphi f$$

l'opérateur de multiplication par $\varphi$.

On a $M_\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2([0,1]))$ et $\|M_\varphi\| = \sup\limits_{[0,1]} |\varphi|$. $M_\varphi$ est autoadjoint : Car $\varphi$ est réelle, on a $(M_\varphi)^* = M_{\bar{\varphi}} = M_\varphi$.

<u>Exercice :</u> $\sigma(M_\varphi) = \varphi([0,1])$.

Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma)$, $\sigma \in \varphi([0,1])$. On définit $f(M_\varphi)$ d'après le théorème 3.5. Soit $(P_n)$ une suite de polynôme telle que $\sup\limits_\sigma |P_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. On a $\|P_n(M_\varphi) - f(M_\varphi)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ d'après le théorème de Stone-Weierstraß.

Or, si $P = \sum\limits_{k=0}^N a_i X^i$, on a $P(M_\varphi) = \sum\limits_{k=0}^N a_k M_\varphi^k = \sum\limits_{k=0}^N a_k M_{\varphi^k} = M_{\sum a_k \varphi^k} = M_{f \circ \varphi}$.

D'une part

$$\|M_{f_k \circ \varphi} - f(M_\varphi)\| = \|P_n(M_\varphi) - f(M_\varphi)\| \to 0.$$

D'autre part

$$\|M_{f_k \circ \varphi} - M_{f\circ\varphi}\| = \big\|M_{(f_n \circ \varphi - f \circ \varphi}\big\| = \sup_{[0,1]} \|P_n \circ \varphi - f \circ \varphi\| = \sup_\sigma |P_n - f| \to 0.$$

Par unicité de la limite, on obtient $f(M_\varphi) = M_{f\circ\varphi}$.

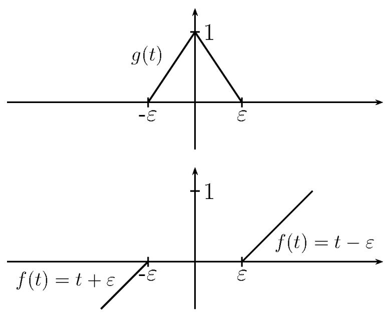
### 3.3. Calcul fonctionnel continu pour les opérateurs normaux

Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. On rappelle que $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour $x \in H$.

**Lemme 3.6 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint et non inversible. Alors, ils existent $f, g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ telles que $g(T) \neq 0$, $f(t)g(t) = 0$ et $\|f(T) - T\| \leq \varepsilon$. En particulier, $\ker f(T) \neq \{0\}$.*

*Démonstration.* Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $g = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $g(0) = 1$. $T$ est autoadjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ et puisque $T$ non inversible, on a $0 \in \sigma(T)$. Donc, on a pour $g$ : $\|g\|_\infty = \sup\limits_{\sigma(T)} |g| \geq g(0) = 1$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = 0$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et $|f(t) - t| \leq \varepsilon$ ailleurs. On obtient




$$\|f(T) - T\| = \sup_{t\in\sigma(T)} |f(t) - t| \leq \varepsilon$$

$$\|g(T)\| = \sup_{t\in\sigma(T)} |g(t)| \geq g(0) \geq 1 \implies g(T) \neq 0$$

et alors $fg = 0 \implies (fg)(T) = 0 \implies f(T)g(T) = 0$.

On a $g(T) \neq 0 \implies \exists x \neq 0$ tel que $g(T)x \neq 0$. Mais puisque $f(T)(g(T)x) = 0$, il suit que $\ker f(T) \neq \{0\}$. $\square$

**Proposition 3.7 :** *Soit $P(z) = \sum\limits_{\substack{0\leq k\leq N \\ 0\leq l\leq N}} a_{kl} z^k \bar{z}^l$. Pour $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, on pose*

$$P(T) = \sum_{\substack{0\leq k\leq N \\ 0\leq l\leq N}} a_{kl} T^k (T^*)^l.$$

*Alors, on a $\sigma(P(T)) = \{P(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\} = P(\sigma(T))$.*

*Démonstration.* '$\supset$': Soit $\lambda \in \sigma(T)$. D'après le lemme 1.41, il existe $(x_n) \subset H$, $\|x_n\| = 1$ telle que $Tx_n - \lambda x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et $T^*x_n - \bar{\lambda} x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. On en déduit que

$$T^k (T^*)^l x_n - \lambda^k \bar{\lambda}^l x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

On obtient $P(T)x_n - P(\lambda)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies P(T) - P(\lambda)I$ est non inversible et donc $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$.

'$\subset$': Soit $\mu \in \sigma(P(T))$. Posons $S = (P(T)^* - \bar{\mu}I)(P(T) - \mu I)$. On a $S^*S$ et $S$ non inversible. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après le lemme 3.6, il existe $f \in \mathcal{C}(\sigma(S))$ avec $\|f(S) - S\| \leq \varepsilon$ et $\ker f(S) \neq 0$.

Posons $H_0 := \ker f(S)$. Parce que $T$ commute avec $S$, alors $T$ commute avec $f(S)$ et donc $H_0$ et invariant par $T$.

On a $\sigma(T\big|_{H_0}) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \sigma(T\big|_{H_0}) \subset \sigma_{ap}(T\big|_{H_0})$. Alors, il existe $(x_n) \subset H_0$, $\|x_n\| = 1$ telle que $Tx_n - \lambda x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ et $T^*x_n - \bar{\lambda}x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. On obtient $P(T)x_n - P(\lambda)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Comme $\|S - f(S)\| \leq \varepsilon$, on a $\|Sx_n\| = \big\|Sx_n - \underbrace{f(S)x_n}_{=0}\big\| \leq \varepsilon$. Il s'ensuit :

$$|\langle (P(T)^* - \bar{\mu}I)(P(T) - \mu I)x_n, x_n\rangle| \leq \|Sx_n\| \leq \varepsilon \implies \|(P(T) - \mu I)(x_n)\|^2 \leq \varepsilon$$

et alors

$$\begin{aligned} |\mu - P(\lambda)| &= \|\mu x_n - P(T)x_n + P(T)x_n - P(\lambda)x_n\| \\ &\leq \underbrace{\|\mu x_n - P(T)x_n\|}_{\leq\sqrt{\varepsilon}} + \underbrace{\|P(T)x_n - P(\lambda)x_n\|}_{\xrightarrow{n\to\infty}} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{dist}(\mu, \{P(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\}) \leq \sqrt{\varepsilon}$ pour tous $\varepsilon \implies \operatorname{dist}(\mu, \{P(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\}) = 0$. Il suit que $\mu \in \{P(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\}$. □

**Théorème 3.8 :** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres unitaires $\Phi_T : \mathcal{C}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ tel que $\Phi_T(i) = T$ et $\Phi_T(\bar{i}) = T^*$ où*

$$i : \sigma(T) \to \mathbb{C},\ z \mapsto z \qquad \text{et} \qquad \bar{i} : \sigma(T) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}.$$

*$\Phi_T$ est isométrique, c'est-à-dire $\sup_{\sigma(T)} |f| = \|f\|_\infty = \|\Phi_T(f)\|$.*

*Pour $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, on pose $f(T) := \Phi_T(f)$. On a les propriétés suivantes :*

*(i)* $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ : $f(T)^* = \overline{f}(T)$.

*(ii) Si $S$ commute avec $T$ et $T^*$, alors $S$ commute avec $f(T)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$.*

*(iii)* $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ : $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

*(iv)* $\forall f \in \mathcal{C}(\sigma(T))\ \forall g \in \mathcal{C}(f(\sigma(T)))$ : $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

*Démonstration.* Soit $\mathcal{P} = \left\{ P\big|_{\sigma(T)},\ P \in \mathbb{C}[z, \bar{z}] \right\}$.

$$P = \sum_{\substack{0\leq k\leq N \\ 0\leq l\leq N}} a_{k,l} z^k \bar{z}^l \implies P\big|_{\sigma(T)}(T) = P(T) = \sum_{\substack{0\leq k\leq N \\ 0\leq l\leq N}} a_{k,l} T^k (T^*)^l$$

$P(T)$ est normal, donc $\|P(T)\| = r(P(T)) = \sup_{\mu\in\sigma(P(T))} |\mu| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |P(\lambda)|$. [15]

$P(T)$ ne dépend que $P\big|_{\sigma(T)}$ : En effet, si $P\big|_{\sigma(T)} = Q\big|_{\sigma(T)}$ pour $P, Q \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$, on a

$$\|P(T) - Q(T)\| = \|(P - Q)(T)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |(P - Q)(\lambda)| = 0 \implies P(T) = Q(T).$$

[15] car $\sigma(P(T)) = \{P(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\}$

L'application $\mathcal{P}\big|_{\sigma(T)} \to \mathcal{L}(H)$ avec $P \mapsto P(T)$ est une isométrie linéaire. Donc, elle se prolonge en une isométrie linéaire de $\overline{\mathcal{P}\big|_{\sigma(T)}}^{\|\cdot\|_\infty}$ dans $\mathcal{L}(H)$, qu'on notera $\Phi_T$. Avec $\|\cdot\|_\infty$ la norme sup sur $\sigma(T)$, on a d'après le théorème de Stone-Weierstraß que $\mathcal{P}\big|_{\sigma(T)}$ est dense dans $\mathcal{C}(\sigma(T))$.[16]

On vérifie que $\Phi_T(fg) = \Phi_T(f)\Phi_T(g)$, c'est-à-dire $\forall f, g \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ : $(fg)(T) = f(T)g(T)$. De plus $\Phi_T(i) = T$ et $\Phi_T(\bar{i}) = T^*$.

Unicité : Soit $\Psi : \mathcal{C}(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$ un morphisme d'algèbres unitaires tel que $\Psi(i) = T$ et $\Psi(\bar{i}) = T^*$. Soit

$$P(z) = \sum_{\substack{0 \le k \le N \\ 0 \le l \le N}} a_{kl} z^k \bar{z}^l \qquad \text{et} \qquad P = \sum_{\substack{0 \le k \le N \\ 0 \le l \le N}} a_{kl} i^k \bar{i}^l.$$

Alors $\Psi(P\big|_{\sigma(T)}) = \sum a_{kl}\Psi(i^k\bar{i}^l) = \sum a_{kl}\Psi(i^k)\Psi(\bar{i}^l) = \sum a_{kl}T^k(T^*)^l = \Phi_T(P\big|_{\sigma(T)})$.

La preuve est similaire à la preuve du théorème sur le calcul fonctionnel pour les opérateurs autoadjoints 3.5. □

**Définition 3.9 :** Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $T$ est appelé *unitaire* si $T^*T = TT^* = I$.

**Corollaire 3.10 (du théorème 3.8) :** *Soient $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(H)$ normal et $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Alors*

*(i) Si $f(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}$, alors $f(T)$ est autoadjoint.*

*(ii) Si $f(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}_+$, alors $f(T)$ est autoadjoint positif.*

*(iii) Si $f(\sigma(T)) \subset \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$, alors $f(T)$ est unitaire.*

*Démonstration.* (i) $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ est $f$ réelle. Il s'ensuit $f(T)^* = \bar{f}(T) = f(T)$, est alors $f(T)$ est autoadjoint.

(ii) $f(T)$ est autoadjoint d'après (i). Puisque $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) \subset [0, \infty)$, donc $f(T)$ positif.

(iii) Soit $f(\sigma(T))$ contenu dans le cercle d'unicité de $\mathbb{C}$.

On a $f\bar{f} = \bar{f}f = 1 \implies (f\bar{f})(T) = (\bar{f}f)(T) = I \implies f(T)\bar{f}(T) = \bar{f}(T)f(T) = I$ et alors $f(T)f(T)^* = f(T)^*f(T) = I$. □

[16] Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ et $(P_n) \subset \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ une suite qui converge uniformément vers $f$ sur $\sigma(T)$. Alors $f(T) = \Phi_T(f) = \lim_{n\to\infty} P_n(T)$.

# 4. Distributions

## 4.1. Fonctions tests

**Notations :** Soit $p \in \mathbb{N}^d$, $p = (p_1, \dots, p_d)$. On note $|p| = p_1 + \cdots p_d$ et $p! = p_1! \cdots p_d!$. Pour $1 \leq i \leq d$, on pose

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad D^p = D_1^{p_1} \dots D_d^{p_d} = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}$$

avec $D_i^0$ l'identité.

**Formule de Leibniz** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f, g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\Omega$. Alors pour $p \in \mathbb{N}^d$, $|p| \leq n$, on a

$$D^p(fg) = \sum_{q \in \mathbb{N}^d} \binom{p}{q} D^{p-q} f D^q g$$

où $\displaystyle\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \prod_{i=1}^d \binom{p_i}{q_i}$ et $q \leq p$ signifie $q_1 \leq p_1, \dots, q_d \leq p_d$.

**Définition 4.1 :** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $K \subset \Omega$ un compact.

- Pour une fonction $\varphi$, on définit *le support de* $\varphi$ par $\mathrm{supp}(\varphi) := \overline{\{x,\ \varphi(x) \neq 0\}}$.
- On note par $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$ à support contenu dans $K$, c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$.

  De plus, on note $\displaystyle\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subset \Omega \\ K \text{ compact}}} \mathcal{D}_K(\Omega)$.

  Une fonction dans $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelée *fonction test*.

**Définition 4.2 :** Soit $K \subset \Omega$ compact et $n \in \mathbb{N}$. Si $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^n(\Omega)$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, on pose

$$N_{K,n}(\varphi) := \sup_{\substack{p \in \mathbb{R}^d \\ |p| \leq n}} \sup_{x \in K} |D^p \varphi(x)| = \sup_{\substack{p \in \mathbb{R}^d \\ |p| \leq n}} \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^{|p|}\varphi}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}(x) \right|.$$

De plus, si $\varphi \in \mathcal{C}^n(\Omega)$ à support compact dans $\Omega$, on pose $\displaystyle N_n(\varphi) := \sup_{\substack{p \in \mathbb{R}^d \\ |p| \leq n}} \sup_{x \in \Omega} |D^p \varphi(x)|$.

**Définition 4.3 :** Une suite $(\varphi_n)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ est dite *convergente dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ *vers une fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un compact $K \subset \Omega$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

- pour tout $n \geq n_0$ : $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K$, de plus $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$,
- pour tout $m \in \mathbb{N}$ : $N_{K,m}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

## 4.2. Distributions

**Définition 4.4 :** Une *distribution sur* $\Omega$ est une application linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ telle que : Si $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est une suite qui converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers la fonction nulle, alors $T(\varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Remarque 4.5 : On note

(i) $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $\Omega$ muni d'une structure d'espace vectoriel.

(ii) $T(\varphi)$ par $\langle T, \varphi\rangle$.

**Proposition 4.6 :** *Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ une application linéaire. Alors $T$ est une distribution si et seulement si pour tout $K \subset \Omega$ compact, ils existent $c_K \geq 0$ et $m_K \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \; : \; |\langle T, \varphi\rangle| \leq c_K N_{m_K}(\varphi).$$

*Démonstration.* '$\Longleftarrow$': Soit $(\varphi_n) \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe $K \subset \Omega$ compact tel que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ pour $n \geq n_0$. On a

$$|\langle T, \varphi_n\rangle| \leq c_K N_{m_k}(\varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies \langle T, \varphi_n\rangle \to 0.$$

D'où $T$ est une distribution.

'$\Longrightarrow$': Supposons qu'il existe $K \subset \Omega$ compact tel que

$$\forall c_K \geq 0 \;\forall m_K \in \mathbb{N} \;\exists \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \; : \; |\langle T, \varphi\rangle| > c_K N_{m_K}(\varphi).$$

On pose $\psi_n = \dfrac{\varphi_n}{nN_n(\varphi_n)}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $m \leq n$, on a $N_m(\psi_n) \leq N_n(\psi_n) = \frac{1}{n}$, alors $N_m(\psi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Il s'ensuit que $(\psi_n)$ converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers 0.

D'autre part, on a

$$|\langle T, \psi_n\rangle| = \left|\langle T, \frac{\varphi_n}{nN_n(\varphi_n)}\rangle\right| > 1.$$

D'où $\langle T, \psi_n\rangle \nrightarrow 0$ est donc $T$ n'est pas une distribution. □

**Définition 4.7 :** Une distribution $T$ sur $\Omega$ est dite *d'ordre fini* s'il existe un entier $m$ qui vérifie : Pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $c_K \geq 0$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \; : \; |\langle T, \varphi\rangle| \leq c_K N_m(\varphi).$$

*L'ordre de $T$* est le pus petit entier $m$ qui satisfait cette condition.

## 4.3. Exemples fondamentaux

### 4.3.1. Fonctions localement intégrables

Soit $f$ une fonction mésurable sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

**Définition 4.8 :** On dit que $f$ est *localement intégrable* si pour tout $K \subset \Omega$ compact, $\mathbf{1}_K f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ où $\mathbf{1}_K$ est la fonction indicatrice de $K$.

On note par $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrable sur $\Omega$.

On a pour tout $1 \leq p \leq \infty$ : $\mathrm{L}^p(\Omega) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on pose

$$\langle [f], \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}$$

avec le mesure de Lebesgue, où $[f]$ définit une distribution sur $\Omega$ d'ordre 0 :

Soit $K$ un compact et soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\varphi)$. On a

$$|\langle [f], \varphi \rangle| \leq \int_K |f(x)|\,\mathrm{dx} \cdot \sup_\Omega |\varphi| \leq \underbrace{\left( \int_K |f(x)|\,\mathrm{dx} \right)}_{<\infty} N_0(\varphi).$$

Donc $[f]$ est bien une distribution d'ordre 0.

### 4.3.2. Suite régularisante

Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

où $P$ est un polynôme de degré $n$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\varphi_0(x) = f(1 - \|x\|_2^2) \qquad \text{où } \|x\|_2^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$$

$$\text{et} \qquad \chi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_0(x)\,\mathrm{dx}}.$$

On a alors que $\chi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\chi \geq 0$, $\operatorname{supp}\chi = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)\,\mathrm{dx} = 1$.

**Définition 4.9 :** La suite $(\chi_n)$ définie par $\chi_n(x) = n^d\chi(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}^*$ s'appelle une *suite régularisante*.

On a les propriétes : $\chi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\chi_n \geq 0$, $\operatorname{supp}\chi_n = \overline{\mathcal{B}(0, \frac{1}{n})}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \chi_n(x)\,\mathrm{dx} = 1$.

**Théorème 4.10 :** *Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $(\chi_n)_n$ une suite régularisante. On pose*

$$(f * \chi_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\chi_n(x-y)\,\mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\chi_n(y)\,\mathrm{dy} \qquad \text{(Convolution)}$$

*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f * \chi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * \chi_n - f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.* □

**Proposition 4.11 :** *Soit $f, g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Alors $[f] = [g]$ si et seulement si $f = g$ presque partout.*

*Démonstration.* '$\Longleftarrow$': Si $f = g$ presque partout, alors $[f] = [g]$.

'$\Longrightarrow$': Il suffit de montrer que si $[f] = 0$, alors $f = 0$ presque partout.

Alors, soit $K \subset \Omega$ un compact et $f_K = \mathbf{1}_K f$. En la prolongeant par 0 hors de $K$, on a $f_K \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. On a

$$(f_K * \chi_n)(x) = \int_K f(y)\chi_n(x-y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Posons $\varphi_{n,x}(y) = \chi_n(x-y)$. Alors, $\varphi_{n,x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et son support est égal à $\overline{\mathcal{B}(x, \frac{1}{n})}$.

Soit $x \in K$. Alors, pour $n$ assez grand, $\operatorname{supp}\varphi_{n,x}$ est dans $\Omega$ puisque $\frac{1}{n} < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$. Donc, pour $x \in K$ et $n$ assez grand, on a

$$(f * \chi_n)(x) = \langle [f], \varphi_{n,x}\rangle = 0 \qquad \text{car} \qquad [f] = 0.$$

De plus, on sait du cours d'intégration que si $\|f_K * \chi_n - f_K\|_{\mathrm{L}^1} \to 0$, alors il existe $(n_k) \nearrow$ telle que $f_K * \chi_{n_k} \to f_K$ presque partout. Alors

$$f_K * \chi_{n_k} = 0 \quad \text{sur } K \implies f_K = 0 \implies f = 0 \quad \text{presque partout sur } K.$$

Ceci est vrai pour tout $K \subset \Omega$ compact et donc $f = 0$ presque partout sur $\Omega$, car

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \qquad \text{où} \qquad K_n = \left\{x,\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \tfrac{1}{n+1}\right\} \cap \overline{\mathcal{B}(0,1)}. \qquad \square$$

Remarque 4.12 : En identifiant $f$ et $[f]$, on peut considérer $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ comme sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

### 4.3.3. Les mesures

Soit $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^d$.

**Définition 4.13 :** Soit $\mu$ une mesure positive sur $\Omega$. On dit que $\mu$ est *une mesure de Radon* si $\mu(K) < +\infty$ pour tout $K \subset \Omega$ compact.

Remarque 4.14 : Toute mesure de Radon complexe $\mu = \mu_1^+ - m_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$ où $\mu_1^\pm$, $\mu_2^\pm$ sont des mesures de Radon positives, définit une distribution sur $\Omega$ par la formule

$$\langle [\mu], \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1^+(x) - \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1^-(x) + i\left(\int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_2^+(x) - \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_2^-(x)\right).$$

$[\mu]$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $K \subset \Omega$ est un compact et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, alors

$$|\langle [\mu], \varphi\rangle| \leq \left(\mu_1^+(K) + \mu_1^-(K) + \mu_2^+(K) + \mu_2^-(K)\right) \sup_\Omega |\varphi|\,.$$

D'où $[\mu]$ est une distribution d'ordre 0.

**Théorème 4.15 (de représentation (Riesz-Markov)) :** *Soit $\mathcal{D}^\circ(\Omega)$ l'espace de fonctions continues sur $\Omega$ à support compact dans $\Omega$. On le note aussi $\mathcal{C}_c(\Omega)$.*

*Soit $T\ :\ \mathcal{D}^\circ(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que*

- $\forall \varphi > 0$ : $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$
- $\forall K \subset \Omega$ *compact, il existe* $c_K \geq 0$ *tel que* $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ : $|\langle T, \varphi \rangle| \leq c_K \sup_{\Omega} |\varphi|$.

*Alors, il existe une unique mesure de Radon positive telle que* $T = [\mu]$. □

Exemple : Soit $a \in \Omega$, $p \in \mathbb{N}^d$ et $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ avec $\varphi \mapsto D^p\varphi(a)$. Alors $T$ est une distribution d'ordre $m = |p|$.

*Démonstration.* Rappel : $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et $D^p\varphi(a) = \dfrac{D^{|p|}\varphi}{\partial x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}}(a)$.

Soit $K \subset \Omega$ un compact et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

$$|T(\varphi)| = |D^p\varphi(a)| \leq N_m(\varphi) \qquad \text{où } m = |p|\,.$$

Alors $T$ est une distribution d'ordre $k \leq m$.

Exercice : ordre$(T) = m$.

Indication : Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi(0) = 1$, $\operatorname{supp}\psi = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$. Poser

$$\Phi_\alpha(x) = (x-\alpha)^p\ \psi\left(\frac{x-a}{\alpha}\right) \qquad \text{pour } \alpha > 0$$

où $(x-a)^p = (x_1 - a_1)^{p_1} \cdots (x_d - a_d)^{p_d}$.

Soit $q \in \mathbb{N}^d$ avec $q < |m|$. Vérifier qu'il n'existe pas $c \geq 0$ tel que

$$|T(\psi_\alpha)| \leq c \sup_{|q| \leq m-1} \sup_{x \in K} |D^q\psi_\alpha(x)| \qquad \text{avec } K = \overline{\mathcal{B}(0,1).}$$ □

**Valeur principale (Cauchy)**

Rappel : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 4.16 :** *Pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *la limite*

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{dt}$$

*existe. L'application* $T$ *définit une distribution d'ordre 1 sur* $\mathbb{R}$*, notée* $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

*Démonstration.* Soit $K$ un compact, $a \geq 0$ tel que $K \subset [-a, a]$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$.

$$\int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{dt} = \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{dt} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{dt} = \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{dt} + \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{dt}\,.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ se prolonge par continuité en 0. Alors

$$\int_{\{|x| \geq \varepsilon\}} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{dt} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_{-a}^{0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{dt} + \int_{0}^{a} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{dt} = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{dt}\,.$$

Donc $|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,\mathrm{dt}\right| \leq 2a \sup_{t\in[-a,a]}|\varphi'(t)|$ par le théorème des accroissements finis. Il s'ensuit que $T$ est une distribution d'ordre $\leq 1$. On note $T = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.

Vérifions que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1 : Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\varphi = 1$ sur $[\frac{1}{j},1]$ et $\mathrm{supp}(\varphi_j) = [\frac{1}{2j},2]$.

$$\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}),\varphi_j\rangle = \int_{\frac{1}{2j}}^{2}\frac{(\varphi_j)}{t}\,\mathrm{dt} \geq \int_{\frac{1}{j}}^{1}\frac{\mathrm{dt}}{t} = \log j.$$

On a pour tout $j$ : $\sup\varphi_j = 1$ et il n'existe pas de constante $c \geq 0$ telle que

$$\log j \leq \left|\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}),\varphi_j\rangle\right| \leq c\cdot \underbrace{\sup_{\mathbb{R}}(\varphi_j)}_{=1} = c$$

car le logarithme n'a pas de limite et donc $\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \geq 1 \implies \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$. $\square$

### 4.3.4. La fonction de Heaviside

Soit $y = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+},\ y(x) = \begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ la fonction de Heaviside. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la limite

$$\langle T,\varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{dx} + \varphi(0)\log\varepsilon\right)$$

existe. $T$ est une distribution sur $\mathbb{R}$, appelée *partie finie de* $\frac{y(x)}{x}$ et notée $\mathrm{Pf}(\frac{y(x)}{x})$. ???

## 4.4. Régularisation

Soit $(\chi_n)$ la suite régularisante qu'on a déjà définie :[17]

$$\chi_n \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^d), \qquad \chi_n \geq 0, \qquad \mathrm{supp}\,\chi_n = \overline{\mathcal{B}(0,1)}, \qquad \int \chi_n = 1.$$

Soit $m\in\mathbb{N}$. On note $\mathcal{D}^m(\Omega) = \{\varphi\in\mathcal{C}^m(\Omega),$ tel que $\mathrm{supp}\,\varphi$ est un compact dans $\Omega\}$ .

**Proposition 4.17 :** *Soit* $m\in\mathbb{N}$, $\varphi\in\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^d)$. *Alors pour tout* $n$, *on a*

$$\varphi*\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \qquad \textit{et} \qquad N_m(\varphi*\chi_n-\varphi) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

*Démonstration.* On a $(\varphi*\chi_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x-y)\chi_n(y)\,\mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\chi_n(x-y)\,\mathrm{dy}$ . Le support

$$\mathrm{supp}(\varphi*\chi_n) \subset \mathrm{supp}\,\varphi + \mathrm{supp}\,\chi_n \subset \mathrm{supp}\,\varphi + \overline{\mathcal{B}(0,\tfrac{1}{n})}.$$

[17] cf. paragraphe 4.3.2

De plus, $\varphi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^d$ : $D^p(\varphi * \chi_n) = D^p(\varphi) * \chi_n$ avec $|p| < m$. Puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \chi_n = 1$, il suit

$$D^p(\varphi * \chi_n)(x) - D^p\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \big(D^p\varphi(x-y) - D^p\varphi(x)\big)\chi_n(y)\,\mathrm{dy}$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^p(\varphi * \chi_n)(x) - D^p\varphi(x)| \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d \\ y\in\overline{\mathcal{B}(0,\frac{1}{n})}}} |D^p\varphi(x-y)D^p\varphi(x)| \underbrace{\int_{\overline{\mathcal{B}(0,\frac{1}{n})}} \chi_n(y)\,\mathrm{dy}}_{=0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

car $\mathcal{D}^p\varphi$ uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. □

Remarque 4.18 : Soit $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$. En prolongeant $\varphi$ en 0 en dehors de $\Omega$, on peut considérer $\varphi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^d)$.

Pour $n$ assez grand : $\operatorname{supp}(\varphi * \chi_n) \subset \operatorname{supp}(\varphi) + \overline{\mathcal{B}(0,\frac{1}{n})}$ et alors $\operatorname{supp}(\varphi * \chi_n) \subset \Omega$ est un compact.

### Partition de l'unité

**Lemme 4.19 :** *Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\Omega_1, \dots, \Omega_n \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts tels que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^n \Omega_i$. Alors ils existent des fonctions continues réelles $h_1, \dots, h_n$ telles que*

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ : $0 \leq h_i \leq 0$, $\operatorname{supp}(h_i) \subset \Omega_i$ *compact*
- $\forall x \in K$ : $\displaystyle\sum_{i=1}^n h_i(x) = 1$.

*Démonstration.* Soit $x \in K$. On choisit $i_x$ tel que $x \in \Omega_{i_x}$. Comme $\Omega_{i_x}$ ouvert, il existe $r(x) > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r(x)) \subset \Omega_{i_x}$.

On a $K \subset \displaystyle\bigcup_{x\in K} \mathcal{B}(x, \tfrac{r(x)}{2})$. Comme $K$ est compact, ils existent $x_1, \dots, x_l \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^l \mathcal{B}\left(x_j, \frac{r(x_n)}{2}\right).$$

Soit $K_i = \displaystyle\bigcup_{\{j,\ x_j\in\Omega_i\}} \overline{\mathcal{B}\left(x_j, \frac{r(x_j)}{2}\right)}$. On a $K_i \subset \Omega_i$ compact et $K = \displaystyle\bigcup_{i\leq n} K_i$. On prend

$$h_i(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,\ \mathbb{R}^d \setminus K_i^\circ)}{\operatorname{dist}(x, K) + \sum_{i\leq n} \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus K_j^\circ)}$$

où $d(x,K) + \displaystyle\sum_{i\leq n} d(x,\ \mathbb{R}^d \setminus K_j^\circ) \neq 0$ car $K \subset K_i$.

Alors pour tout $i$ : $h_i$ continue, $\operatorname{supp}(h_i) \subset K_i$, $0 \leq h_1 \leq 1$ et pour tout $x \in K$ :

$$\sum h_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{dist}(x,\ \mathbb{R}^d \setminus K_i^\circ)}{\sup \operatorname{dist}(x,\ \mathbb{R}^d \setminus K_j^\circ)} = 1. \qquad \square$$

**Théorème 4.20 (Partition de l'unité) :** *Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ des ouverts tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$. Alors ils existent $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que*

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ : $0 \leq \varphi \leq 1$ *et* $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset \Omega_i$
- $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1$ *sur un voisinage de $K$.*

*Démonstration.* Posons $\Omega = \bigcup \Omega_i$ et $r := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > 0$.

Soit $\widetilde{K} := \{y \in \mathbb{R}^d,\ \operatorname{dist}(y, K) \leq \frac{r}{2}\}$ ce qui est compact et $K \subset \widetilde{K}^\circ$. D'après le lemme 4.19, ils existent des fonctions $h_1, \dots, h_n$ telles que

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ : $0 \leq h_i \leq 1$ et $\operatorname{supp}(h_i)$ est un compact de $\Omega_i$
- $\forall x \in \widetilde{K}$ : $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$.

On pose $\delta = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \widetilde{K}^\circ)$, $\delta_i = \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(h_i), \mathbb{R}^d \setminus \Omega_i)$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\delta, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ où $\varepsilon > 0$. De plus, soient $u = \chi_n$ pour $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et $\chi_n$ la suite régularisante.

On a $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $u \geq 0$, $\operatorname{supp} u = \overline{\mathcal{B}(0, \frac{1}{n})}$ et $\displaystyle\int u(x)\,\mathrm{dx} = 1$.

On pose $\varphi_i = h_i * u$ ce qui appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. De plus $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset \operatorname{supp} h_i + \overline{\mathcal{B}(0, \frac{1}{n})} \subset \Omega_i$ et $\operatorname{supp}(\varphi_i)$ est compact. Donc pour tout $i$ : $\varphi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Maintenant on prend $x$ tel que $\operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon$ et $y \in \overline{\mathcal{B}(0, \frac{1}{n})}$. Alors $x - y \in \widetilde{K}$. Cela implique

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} h_i(x-y) = 1 &\implies \sum_{i=1}^{n} h_i(x-y)u(y) = u(y) \\
&\implies \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{\mathcal{B}}} h_i(x-y)u(y)\,\mathrm{dy} = \int_{\overline{\mathcal{B}}} u(y)\,\mathrm{dy} = 1 \qquad \text{où } \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}(0, \tfrac{1}{n})}
\end{aligned}$$

Alors $\sum_{i \leq n} u_i = 1$ pour $\operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon$. $\square$

**Corollaire 4.21 (fonctions plateaux) :** *Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset \mathcal{O}$. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ tel que $\varphi = 1$ sur un voisinage de $K$.* $\square$

## 4.5. Support d'une distribution

**Définition 4.22 :** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\mathcal{O} \subset \Omega$ un ouvert. On dit que $T$ *est nulle* dans $\mathcal{O}$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ : $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

**Définition 4.23 :** On appelle support de $T$ (noté $\operatorname{supp} T$) le complémentaire de l'union de tous les ouverts $\mathcal{O}$ dans lesquels $T$ est nulle.

**Proposition 4.24 :** *Le support de $T$ est égal au complémentaire du plus grand ouvert dans lequel $T$ est nulle.*

*Démonstration.* Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ la famille des ouverts dans lesquels $T$ est nulle. Montrons que $T$ est nulle dans $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{O}_i$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup \mathcal{O}_i$. Comme $\operatorname{supp}\varphi$ est compact, il existe $J \subset \mathcal{I}$ fini tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup\limits_{i\in J} \mathcal{O}_i$. D'après le théorème 4.20 (sur la partition de l'unité) il existe $(\varphi_i)_{i\in J} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

- pour tout $i \in J$ : $\operatorname{supp}\varphi_i \subset \mathcal{O}_i$
- $\sum\limits_{i\in J} \varphi_i = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp}\varphi$

Alors $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \Big(\sum\limits_{i\in J}\varphi_i\Big)\varphi \rangle = \sum\limits_{i\in J} \langle T, \varphi_i\varphi \rangle = 0$ car puisque $\operatorname{supp}(\varphi_i\varphi) \subset \mathcal{O}_i$ on a $\langle T, \varphi_i\varphi \rangle = 0$. $\square$

Exemple : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $a \in \Omega$ avec $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\operatorname{supp}(\delta_a) = a$.

## 4.6. Opérateurs sur les distributions

### 4.6.1. Restriction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ ouvert. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On peut restreindre $T$ à $\widetilde{\Omega}$ en posant $\langle T|_{\widetilde{\Omega}}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega})$. $\big(\mathcal{D}(\widetilde{\Omega}) \subset \mathcal{D}(\Omega)\big)$

### 4.6.2. Localisation

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $K \subset \Omega$ compact et $\mathcal{O} \subset K$ ouvert. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\chi = 1$ sur un voisinage de $K$ et $\operatorname{supp}\chi \subset \mathcal{O}$. On pose $\langle \widetilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Alors $\widetilde{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\widetilde{T}) \subset \mathcal{O}$ et $\widetilde{T}$ coincide avec $T$ sur un voisinage de $K$.

### 4.6.3. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Définition 4.25 :** Une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite convergente vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ : $\langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle T, \varphi\rangle$.

Exemple : Soit $T_n = [f_n]$, $f_n = \cos nx$. [18] Donc $(T_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$. On a

$$\begin{aligned}
\langle T_n, \varphi\rangle &= \int_{-a}^{a} \cos(nx)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\varphi(x)\right]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \frac{\sin(nx)}{n}\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= -\frac{1}{n}\int_{-a}^{a} \sin(nx)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
\implies |\langle T_n, \varphi\rangle| &\le \frac{1}{n}\underbrace{\int_{-a}^{a} \left|\varphi'(x)\right|\mathrm{dx}}_{<\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Remarque 4.26 : Soit $(f_n)_n \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Si pour tout $K \subset \Omega$ compact, on a que $\displaystyle\int_K |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, alors $[f_n] \xrightarrow{n\to\infty} [f]$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\left(\text{Si } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et que } K = \operatorname{supp}\varphi, \text{ alors } \left|\int_K f_n\varphi - \int_K f\varphi\right| \le \sup_K |\varphi| \int_K |f_n - f| \to 0.\right)$$

### 4.6.4. Multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

**Lemme 4.27 :** *Soit $(\varphi_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $(\varphi_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $(f\varphi_n)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$.*

*Démonstration.* Supposons que $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe $K \subset \Omega$ compact tel que pour tout $n$ : $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$). On a

- $\forall m \in \mathbb{N}$ : $N_m(\varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- $\forall p \in \mathbb{N}^d$ : $\displaystyle D^p(f\varphi_n)(x) = \sum_{\substack{q\le p\\ q\in\mathbb{N}^d}} \binom{p}{q} D^{p-q}f(x) D^q\varphi_n(x).$ (formule de Leibniz)

[18] Rappelons que pour tout $n$, $f_n \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ : $[f_n]$ est bien définie.

Alors, on obtient

$$\sup_{x\in\Omega}|D^p(f\varphi_n)(x)| \leq \sum_{\substack{q\leq p\\ q\in\mathbb{N}^d}} \binom{p}{q} \sup_{x\in K}\left|\left(D^{p-q}f\right)(x)\right| \sup_{x\in K}|D^q\varphi_n(x)|$$
$$\leq \underbrace{\left(\sum_{\substack{q\leq p\\ q\in\mathbb{N}^d}} \binom{p}{q} \sup_{x\in K}\left|\left(D^{p-q}f\right)(x)\right|\right)}_{\text{constante finie}} N_{|p|}(\varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

Remarque 4.28 : On pose $\langle fT,\varphi\rangle := \langle T, f\varphi\rangle$ pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Grâce au lemme précédent, on a $fT\in\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple : Soit $\Omega=\mathbb{R}$. On a $x\,\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1 \equiv [1]$. En effet, soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$\langle x\,\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}),\varphi\rangle = \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), x\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\{|x|>\varepsilon\}} \frac{t\varphi(t)}{t}\,\mathrm{dt}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\{|x|>\varepsilon\}} \varphi(t)\,\mathrm{dt} = \int \varphi(t)\,\mathrm{dt} = \langle[1],\varphi\rangle.$$

**Proposition 4.29 :** *Il est vrai :* $\operatorname{supp}(fT)\subset\operatorname{supp} f\cap\operatorname{supp} T$.

*Démonstration.* $\operatorname{supp}(fT)\subset\operatorname{supp} f$ : Pour $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ : $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\setminus\operatorname{supp} f$.

$$\Longrightarrow \langle fT,\varphi\rangle = \langle T,\underbrace{\varphi f}_{=0}\rangle = 0 \Longrightarrow \operatorname{supp} fT\subset\operatorname{supp} f.$$

$\operatorname{supp}(fT)\subset\operatorname{supp}(T)$ : Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ et $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\setminus\operatorname{supp} T$.

$$\Longrightarrow \langle fT,\varphi\rangle = \langle T,\varphi f\rangle = 0 \qquad \text{car } \operatorname{supp} f\varphi\subset\Omega\setminus\operatorname{supp} T \Longrightarrow \operatorname{supp} fT\subset\operatorname{supp} T. \qquad \square$$

## 4.7. Dérivation

**Définition 4.30 :** Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ ouvert et $p\in\mathbb{N}^d$. *L'opérateur de dérivation d'ordre* $p$ *sur* $\mathcal{D}'(\Omega)$ est défini par :

$$\forall T\in\mathcal{D}'(\Omega)\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega) :\ \langle D^pT,\varphi\rangle := (-1)^{|p|}\langle T, D^p\varphi\rangle.$$

Autrement dit :

$$\langle \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_d^{p_d}}T,\varphi\rangle = (-1)^{|p|}\langle T, \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_d^{p_d}}\varphi\rangle.$$

Remarque 4.31 : Comparer avec l'intégration par parties pour $f\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$, $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\int f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{dt} = \underbrace{\Big[f\varphi\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = -\int f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt},$$

d'où le « $(-1)^{|p|}$ » dans la définition.

**Proposition 4.32 :** *$D^pT$ est une distribution sur $\Omega$.*

*Démonstration.* Il est facile de montrer que $D^pT$ est linéaire.

Soit $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ une suite qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors, il existe un compact $K \subset \Omega$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ : $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ et $\forall m \in \mathbb{N}$ : $N_m(\varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ : $\operatorname{supp}(D^p\varphi_n) \subset K$ et

$$\begin{aligned}\forall m : \ N_m(D^p\varphi_n) = \sup_{|q|\le m}\sup_{x\in\Omega}|D^q(D^p\varphi_n)(x)| &= \sup_{|q|\le m}\sup_{x\in\Omega}\left|D^{q+p}\varphi_n(x)\right| \\ &\le N_{m+|p|}(\varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Donc $D^p\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ : $\langle D^pT, \varphi_n\rangle = (-1)^{|p|}\langle T, D^p\varphi_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0.$ □

Remarque 4.33 : Si $T$ est d'ordre $m$, alors $D^pT$ est d'ordre $m+|p|$.

**Proposition 4.34 :** *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Alors pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$ :* $\dfrac{\partial}{\partial x_j}[f] = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right]$.

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on suppose que $j=1$.

Première étape : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Alors il existe $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d] \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial}{\partial x_1}[f], \varphi\rangle &= -\langle [f], \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\rangle \\ &= -\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} f(x_1,\dots,x_d)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{dx_1}\cdots\mathrm{dx_d} \\ &= -\int_{[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d]}\left(\int_{[a_1,b_1]} f(x_1,\dots,x_d)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{dx_1}\right)\mathrm{dx_2}\cdots\mathrm{dx_d}\end{aligned}$$

par Fubini. L'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial}{\partial x_1}[f], \varphi\rangle &= -\int_{[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d]}\left(\int_{[a_1,b_1]} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_d)\varphi(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{dx_1}\right)\mathrm{dx_2}\cdots\mathrm{dx_d} \\ &= -\int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_d)\varphi(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{dx_1}\cdots\mathrm{dx_d} \\ &= \langle \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right], \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Deuxième étape (cas général) : $\forall x \in \operatorname{supp}\varphi$, il existe $[a_1(x),b_1(x)]\times\cdots\times[a_d(x),b_d(x)] \subset \Omega$ tel que $x \in U(x)$ où $U(x) = (a_1(x),b_1(x))\times\cdots\times(a_d(x),b_d(x))$.

Comme le support de $\varphi$ est compact, ils existent $x_1,\dots,x_n \in \operatorname{supp}\varphi$, tels que $K = \bigcup_i U(x_i)$.

D'après le théorème 4.20 (sur la partition de l'unité), ils existent $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ : $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U(x_j)$ et $\displaystyle\sum_{j \geq 1} \varphi_j = 1$ sur un voisinage du support de $\varphi$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{dx} &= \int_\Omega f(x) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{j=1}^n \varphi_j \varphi \right)(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega f(x) \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_j \varphi)(x)\,\mathrm{dx} \\
&= -\sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) (\varphi_j \varphi)(x)\,\mathrm{dx} = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \varphi(x)\,\mathrm{dx},
\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x_1}[f] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right]$. □

**Corollaire 4.35 :** *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^d$. Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^m$, alors $D^p[f] = [D^p f]$ pour $|p| \leq m$.*

*Démonstration.* Par récurrence sur $|p|$. D'après la proposition précédente (4.34), ceci est vrai pour $|p| = 1$.

Supposons que le corollaire soit vrai pour $p$ avec $|p| = k - 1$.

$$\begin{aligned}
D^p[f] = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}[f] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^{|p|-1}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_j^{p_j - 1} \cdots \partial x_d^{p_d}}[f] \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left[ \frac{\partial^{|p|-1}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_j^{p_j - 1} \cdots \partial x_d^{p_d}} f \right] \right) \\
&= \left[ \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}} f \right]
\end{aligned}$$

par la proposition précédente. □

Exemple : (1) Soit $a \in \Omega$ et $\delta_a$ la distribution de Dirac en $a$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. Alors, $\langle D^p \delta_a, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle \delta_a, D^p \varphi \rangle = (-1)^{|p|} D^p \varphi(a)$.

(2) Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $y = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ la fonction de Heaviside. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$\langle [y'], \varphi \rangle = -\langle [y], \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}_+} \varphi'(x)\,\mathrm{dx} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \implies [y'] = \delta_0.$$

Raisonnement : Il existe $a$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$ et on a $\varphi(a) = 0$.

(3) Soit $f(x) = \log |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ et donc $[f]$ est bien une distribution.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle [f]', \varphi\rangle = -\langle [f], \varphi'\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{|x|>\varepsilon\}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} + \int_{\varepsilon}^{a} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx}\right)
\end{aligned}$$

où $a > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$.

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[f(x)\varphi(x)\Big]_{-a}^{-\varepsilon} - \int_{-a}^{-\varepsilon} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \Big[f(x)\varphi(x)\Big]_{\varepsilon}^{a} - \int_{\varepsilon}^{a} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}\right) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left((\log\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - (\log\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_{|x|-<\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{dx}\right)
\end{aligned}$$

Par Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon) &= \varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + \varepsilon o(1) \\
\varphi(-\varepsilon) &= \varphi(0) - \varphi'(0)\varepsilon - \varepsilon o(1) \\
\Longrightarrow\ \varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) &= -2\varphi'(0)\varepsilon + \varepsilon o(1) \implies \log(\varepsilon)\big(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \\
\Longrightarrow\ \langle [f]', \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\{|x|>\varepsilon\}}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{dx}\right) = \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle \\
\Longrightarrow\ [f]' &= \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x})
\end{aligned}$$

**Proposition 4.36 :** *Soit* $p \in \mathbb{N}^d$. *Alors*

*(i)* $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ : $\operatorname{supp}(D^pT) \subset \operatorname{supp} T$

*(ii) Si* $(T_n)_n$ *converge vers* $T$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *alors* $(D^pT_n)_n$ *converge vers* $D^pT$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

*Démonstration.* (i) Immédiat.

(ii) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Alors $\langle D^pT_n, \varphi\rangle = (-1)^{|p|}\langle T_n, D^p\varphi\rangle \xrightarrow{n\to\infty} (-1)^{|p|}\langle T, D^p\varphi\rangle = \langle D^pT, \varphi\rangle$. □

**Proposition 4.37 (Formule de Leibniz) :** *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *et* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. *Alors*

$$D^p(fT) = \sum_{|q|\le|p|}\binom{p}{q} D^{p-q} f D^q T \qquad\qquad p \in \mathbb{N}^d.$$

*Démonstration.* Cette preuve se fait par récurrence sur $|p|$.

Soit $p = 1$. $D^p = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ pour un $j \in \{1, \ldots, d\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(fT), \varphi \rangle = -\langle fT, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle = -\langle T, f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle &= -\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi) - \varphi \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle \\
&= -\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi) \rangle + \langle T, \varphi \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, f\varphi \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial x_j} T, \varphi \rangle \\
&= \langle f\frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial x_j} T, \varphi \rangle = \langle f\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} T, \varphi \rangle \\
\implies \frac{\partial}{\partial x_j}(fT) = f\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} T
\end{aligned}$$

On continue de la même manière la preuve par récurrence. □

**Lemme 4.38 :** *Soit* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

*Alors, ils existent* $\psi_1, \ldots, \psi_d \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *telles que* $\displaystyle\psi = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}$.

*Démonstration.* Par récurrence sur la dimension $d$.

Soit $d = 1$ et soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{dx} = 0$. La fonction $\displaystyle\psi_1(x) := \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,\mathrm{dt}$ convient et $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Supposons que le lemme soit vrai à l'ordre $d$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \psi(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

Posons $\displaystyle\varphi(x_1, \ldots, x_d) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x_1, \ldots, x_d, t)\,\mathrm{dt}$. On a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \psi(x)\,\mathrm{dx} = 0.$$

Par récurrence, ils existent $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\varphi = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}$.

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\,\mathrm{dt} = 0$. On pose

$$\psi_{d+1}(x) = \int_{-\infty}^{x_{d+1}} \Big[\psi(x_1, \ldots, x_d, t) - \varphi(x_1, \ldots, x_d)\theta(t)\Big]\,\mathrm{dt}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_{d+1}}{\partial x_{d+1}}(x) &= \psi(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) - \theta(x_{d+1})\varphi(x_1, \ldots, x_d) \\
&= \psi(x_1, \ldots, x_{d+1}) - \theta(x_{d+1}) \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_d)
\end{aligned}$$

On pose $\psi_j(x_1, \dots, x_{d+1}) = \theta(x_{d+1})\varphi_j(x_1, \dots, x_d)$ et il s'ensuit $\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{d+1} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}$. $\square$

**Théorème 4.39 :** *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\frac{\partial T}{\partial x_j} = 0$ *pour tout* $j \in \{1, \dots, d\}$. *Alors* $T = [c]$ *où* $c \in \mathbb{R}^d$ *est une constante.*

*Démonstration.* Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)\,\mathrm{dx} = 1$. On pose $c = \langle T, \theta\rangle$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On pose $\psi(x) = \varphi(x) - \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{dx}\right)\theta(x)$.

On a $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

D'après le lemme 4.38, ils existent $\psi_1, \dots, \psi_d \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que $\psi = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}$.

On a

$$
\begin{aligned}
\langle T - [c], \varphi\rangle &= \langle T, \varphi\rangle - c\int \varphi(x)\,\mathrm{dx} = \langle T, \varphi\rangle - \left(\int \varphi(x)\,\mathrm{dx}\right)\langle T, \theta\rangle \\
&= \langle T, \varphi\left(\int \varphi(x)\,\mathrm{dx}\right)\theta\rangle = \langle T, \psi\rangle \\
&= \langle T, \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}\rangle = -\langle \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \psi\rangle = 0 \\
\implies T = [c].
\end{aligned}
$$

$\square$

## 4.8. Formule des sauts

On a vu que $[y]' = \delta_0$ où $y = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$.[19]

**Théorème 4.40 :** *Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f$ *une fonction sur* $\Omega$ *telle qu'ils existent* $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in \Omega$ *vérifiants les propriétés suivantes :*

*(1)* $f \in \mathbb{C}^1(\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_d\})$

*(2) Pour tout* $j \in \{1, \dots, n\}$ *les limités à droit et à gauche*

$$f(x_j+) = \lim_{\substack{x \to x_j \\ x > x_j}} f(x) \qquad\qquad f(x_j-) = \lim_{\substack{x \to x_j \\ x < x_j}} f(x)$$

*existent.*

*(3) La dérivée* $f'$ *définie sur* $\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_d\}$ *est localement intégrable sur* $\Omega$.

[19] cf. exemple page 50

*Alors* $[f]' = [f'] + \sum_{j=1}^{n} \Big( f(x_j+) - f(x_j-) \Big) \delta_{x_j}.$

*Démonstration.* Soit $\Omega$ un intervalle $(a,b)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \langle [f]', \varphi \rangle &= -\langle [f], \varphi' \rangle = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\ &= -\sum_{j=0}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \qquad \text{avec } x_0 = a,\ x_{n+1} = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} &= \Big[ f\varphi \Big]_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= f(x_{j+1}-)\varphi(x_{j+1}) - f(x_j+)\varphi(x_j) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

avec $f(x_{n+1}-)\varphi(x_{n+1}) = f(x_0+)\varphi(x_0) = 0$ par convention car $f\varphi = 0$ au voisinage de $a$ et $b$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \langle [f]', \varphi \rangle &= -\sum_{j=0}^{n} \Big[ f(x_{j+1}-)\varphi(x_{j+1}) - f(x_j+)\varphi(x_j) \Big] + \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= -\sum_{j=0}^{n} f(x_{j+1}-)\varphi(x_{j+1}) + \sum_{j=0}^{n} f(x_j+)\varphi(x_j) + \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \langle [f'], \varphi \rangle - \sum_{j=1}^{n} f(x_j-)\varphi(x_j) + \sum_{j=1}^{n} f(x_j+)\varphi(x_j) \\ &= \langle [f'], \varphi \rangle + \sum_{j=1}^{n} \Big( f(x_j+) - f(x_j-) \Big) \underbrace{\varphi(x_j)}_{=\langle \delta_{x_j}, \varphi \rangle} \end{aligned}$$

D'où le résultat pour $\Omega$ un intervalle.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}$ quelconque, on écrit $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, où $\Omega_i$ sont les composantes connexes de $\Omega$ et on applique le cas précédent dans chaque $\Omega_i$. □

**Corollaire 4.41 (formule des sauts en cas général) :** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *un ouvert et* $f$ *une fonction sur* $\Omega$ *telle qu'ils existent* $x_1 < x_2 < \cdots < x_d \in \mathbb{R}$ *vérifiants*

*(i)* $f \in \mathcal{C}^p(\Omega \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$

*(ii) Pour tout* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *et pour tout* $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ *les limités à droit et à gauche*

$$f^{(k)}(x_j+) = \lim_{\substack{x \to x_j \\ x > x_j}} f^{(k)}(x) \qquad\qquad f^{(k)}(x_j-) = \lim_{\substack{x \to x_j \\ x < x_j}} f^{(k)}(x)$$

*existent.*

*(iii) La dérivée* $f^{(p)}$ *définie sur* $\Omega \setminus \{x_1, \ldots, x_d\}$ *est localement intégrable sur* $\Omega$.

*Alors* $[f]^{(p)} = [f^{(p)}] + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p-1}\Big(f^{(k)}(x_j+) - f^{(k)}(x_j-)\Big)\delta_{x_j}^{(p-1-k)}.$

*Démonstration.* Par récurrence. □

## 4.9. Distributions à support compact

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.

**Proposition 4.42 :** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact $K \subset \Omega$. Alors, il existe $\widetilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de support égal à $K$ telle que la restriction de $\widetilde{T}$ à $\Omega$ coincide avec $T$.*

*Démonstration.* Soit $\rho$ une fonction plateau de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\operatorname{supp}(\rho) \subset \Omega$ et $\rho = 1$ sur un voisinage de $K$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on pose $\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \rho\varphi\rangle$. $\widetilde{T}$ est bien définie car $\rho\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. De plus $\widetilde{T}$ est bien une distribution : Si $(\varphi_n)_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors $(\rho\varphi_n)_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

$\widetilde{T}$ coincide avec $T$ sur $\Omega$ : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a $\rho\varphi = \varphi$ sur un voisinage de $K$ et donc $\rho\varphi - \varphi = 0$ sur un voisinage de $K$

$$\Longrightarrow \langle T, \rho\varphi - \varphi\rangle = 0 \iff \langle T, \rho\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \cap K = \emptyset$. On a aussi $\operatorname{supp}(\rho\varphi) \cap K = \emptyset$

$$\Longrightarrow \langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \rho\varphi\rangle = 0 \Longrightarrow \operatorname{supp}(\widetilde{T}) \subset K.$$

On a $\operatorname{supp}\widetilde{T} = K$. □

**Proposition 4.43 :** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $K \subset \Omega$ compact et $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(K,\ \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$. Alors $\operatorname{supp} T \subset K$ si et seulement s'il existe $m$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, il existe $c_\varepsilon > 0$, vérifiant*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \ |\langle T, \varphi\rangle| \le c_\varepsilon \sup_{|p|<m}\sup_{x\in K_\varepsilon} |D^p\varphi(x)|$$

*où* $K_\varepsilon = \{x \in \Omega,\ \operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon\}$.

*Démonstration.* Supposons que $\operatorname{supp} T \subset K$. $K_{\varepsilon_0}$ est compact dans $\Omega$. Par définition d'une distribution[20], ils existent $m \in \mathbb{N}$ et $c_0 > 0$ tels que pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{K_{\varepsilon_0}}(\Omega)$

$$|\langle T, \psi\rangle| \le c_0 N_m(\psi).$$

Soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et $\rho_\varepsilon$ une fonction plateau telle que $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subset K_\varepsilon$ et $\rho_\varepsilon = 1$ sur un voisinage de $K$. On a $\varphi = \rho_\varepsilon\varphi$ sur un voisinage de $K$ et donc $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \rho_\varepsilon\varphi\rangle$ car $\operatorname{supp} T \subset K$.

On a

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \rho_\varepsilon\varphi\rangle| \le c_0 \sup_{|p|\le m}\sup_{x\in K_\varepsilon} |D^p(\rho_\varepsilon\varphi)(x)| \le c_\varepsilon \sup_{|p|\le m}\sup_{x\in K_\varepsilon} |D^p(\varphi)(x)|$$

[20] cf. proposition 4.6

car les dérivées de $\rho_\varepsilon$ sont bornées et $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon\varphi) \subset K_\varepsilon \subset K_{\varepsilon_0}$.

Pour la réciproque, on suppose que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel que

$$\langle T, \varphi\rangle \leq c_\varepsilon \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{K}_\varepsilon} |D^p\varphi(x)|\,.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \cap K = \emptyset \implies \exists\bar{\varepsilon} > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \cap K_{\bar{\varepsilon}} = \emptyset$. On a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq c_{\bar{\varepsilon}} \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in K_{\bar{\varepsilon}}} |D^p\varphi(x)| = 0 \implies \langle T, \varphi\rangle = 0$$

d'où $\operatorname{supp} T \subset K$. □

**Corollaire 4.44 :** *Si $T$ est à support compact, alors $T$ est d'ordre fini.*

**Théorème 4.45 :** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} T \subset \{a\}$ pour $a \in \Omega$. Alors, il existe $m$ tel que*

$$T = \sum_{|p|\leq m} c_p D^p \delta_a$$

*où les $c_p$ sont des constantes.*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on suppose que $a = 0$.[21]

Soient $m$ l'ordre de $T$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a par la formule de Taylor

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{|p|\leq m} \frac{D^p\varphi(0)}{p!} x^p + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^m}{m!} \varphi^{m+1}(\theta x) \underbrace{(x, x, \dots, x)}_{m+1 \text{ fois}} \mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{|p|\leq m} \frac{D^p\varphi(0)}{p!} x^p + \psi(x)\end{aligned}$$

avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de 0.

Soit $\rho$ une fonction plateau (de classe $\mathcal{C}^\infty$) égale à 1 dans $\mathcal{B}(0, \frac{1}{2})$ tel que $\operatorname{supp}\rho \subset \mathcal{B}(0, 1)$. On pose $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\frac{x}{\varepsilon})$, $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$ et $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subset \mathcal{B}(0, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}|\langle T, \rho_\varepsilon\psi\rangle| &\leq \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^p(\rho_\varepsilon\psi)(x)| \\ &\leq c \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \sum_{|q|\leq|p|} \binom{p}{q} \underbrace{\left(D^{p-q}\rho_\varepsilon\right)(x)}_{\leq c_1} |D^q\psi(x)| \\ &\leq c \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \sum_{|q|\leq|p|} \binom{p}{q} c_1 \|x\|_2^{m+1-|q|} \leq \text{cste}\cdot\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}(0, \varepsilon_0)} \subset \Omega$. On a pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$ :

$$\langle T, \rho_{\varepsilon_0}\psi\rangle = \underbrace{\langle T, (\rho_{\varepsilon_0} - \rho_\varepsilon)\psi\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle T, \rho_\varepsilon\psi\rangle}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0} \qquad \text{car } \operatorname{supp}((\rho_{\varepsilon_0} - \rho_\varepsilon)\psi) \cap \{0\} = \emptyset,$$

[21] On se ramène à ce cas par une translation.

d'où $\langle T, \rho_{\varepsilon_0}\psi\rangle = 0$.

Il s'ensuit

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\rho_{\varepsilon_0}\varphi\rangle = \langle T,\rho_{\varepsilon_0}\left(\sum_{|p|\leq m}\frac{D^p\varphi(0)}{p!}x^p\right) + \rho_{\varepsilon_0}\psi\rangle = \sum_{|p|\leq m}\frac{\langle T,\rho_{\varepsilon_0}x^p\rangle}{p!}\underbrace{D^p\varphi(0)}_{=\langle D^p\delta_0,\varphi\rangle}.$$

D'où $T = \sum_{|p|\leq m} c_p D^p\delta_0$ avec $c_p = \frac{1}{p!}\langle T,\rho_{\varepsilon_0}x^p\rangle$ (où $\rho_{\varepsilon_0}x^p \;:\; x\mapsto \rho_{\varepsilon_0}(x)x^p$). □

Exercice : Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ trouver les distributions $T$ telles que $x^mT = 0$ pour $m\in\mathbb{N}^*$.

## 4.10. Solutions fondamentales

Soit $P\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]$, $P(X_1,\dots,X_d) = \sum_{|p|\leq m} a_pX_1^{p_1}\cdots X_d^{p_d}$.

**Définition 4.46 :** On pose $P(D) = \sum_{|p|\leq m} a_pD^p = \sum_{|p|\leq m} a_p\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdots x_d^{p_d}}$ *l'opérateur différentiel.*

**Définition 4.47 :** On appelle *solution fondamentale* de l'opérateur différentiel $P(D)$ toute distribution $E\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $P(D)E = \delta_0$ où $\delta_0$ est la distribution de Dirac en zéro.

Remarque 4.48 : La fonction $x\mapsto\frac{1}{\|x\|_2^\alpha}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $a<d$.

En effet : $\frac{1}{\|x\|_2^\alpha}\leq\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{d}}\cdots|x_d|^{\frac{1}{d}}}$ pour $x\in[-1,1]^d$ et donc

$$\int_{[-1,1]^d}\frac{1}{\|x\|_2^\alpha}\leq\int_{[-1,1]^d}\frac{1}{|x_1|^{\frac{1}{d}}\cdots|x_d|^{\frac{1}{d}}}\,\mathrm{dx}_1\cdots\mathrm{dx}_d \overset{\text{Fubini}}{\leq}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{dt}}{t^{\frac{\alpha}{d}}}\right)^d<\infty$$

si $\frac{\alpha}{d}<1$.

Exemple : On a $[y]' = \delta_0$ où $y = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$.

**Opérateur de Cauchy-Riemann** On identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ par $(x,y)\mapsto x+iy$. L'opérateur de Cauchy-Riemann est définie par

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

**Proposition 4.49 :** *Dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\left[\frac{1}{\pi z}\right]$ *est une solution fondamentale de* $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$.

*Démonstration.* $z \mapsto \dfrac{1}{\pi z}$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.
Par la formule de Cauchy-Pompeïu, on a

$$\varphi(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi}\int_{|z|<R}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(x+iy)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+iy}.$$

Pour $R$ assez grand, tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{B}(0,R)$, on obtient

$$\varphi(0) = -\frac{1}{\pi}\int_{|z|<R}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}(x+iy)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+iy}.$$

On a alors

$$-\langle\left[\frac{1}{\pi z}\right], \frac{\partial}{\partial\bar z}\varphi\rangle = \varphi(0) \implies \langle\frac{\partial}{\partial\bar z}\left[\frac{1}{\pi z}\right], \varphi\rangle = \varphi(0) \implies \frac{\partial}{\partial\bar z}\left[\frac{1}{\pi z}\right] = \delta_0. \qquad \square$$

**Le Laplacien** $\Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = P(D)$ pour $P = x_1^2 + \cdots + x_d^2$.

Soit $d = 1$. Soit $E = \left[\frac{|x|}{2}\right]$. Alors

$$E' = [h] \qquad \text{avec } h = \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0\\ -\frac{1}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$
$$E'' = \delta_0.$$

Soit $d = 2$. $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$

Rappel de la formule de Green : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à frontière de classe $\mathcal{C}^1$ et soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Alors

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(u(\xi)\frac{\partial v(\xi)}{\partial N_\xi} - v(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial N_\xi}\right)\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

où $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$ et $N_\xi$ est le vecteur normal unitaire au $\xi$ de $\partial\Omega$. De plus

$$\frac{\partial u}{\partial N_\xi} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{u(\xi+\lambda N_\xi) - u(\xi)}{\lambda}.$$

**Proposition 4.50 :** *Soit* $E = \left[\frac{1}{2\pi}\log r\right]$, $r = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Alors $E$ est solution fondamentale de $\Delta$.*

*Démonstration.* Soit $f(x) = \frac{1}{2\pi}\log\left((x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \log r$. On a $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)$ car

$$\int_{\|x\|_2\leq 1}|f(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} r\,|\log r|\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 r\log\tfrac{1}{r}\,\mathrm{d}r < \infty.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $0 < \varepsilon < R$. On a par la formule de Green

$$\int_{\{\varepsilon<\|x\|_2<R\}} (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\,\mathrm{dx} = \underbrace{\int_{\{\|x\|_2=R\}} \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial f}{\partial r}\right)\mathrm{dr}}_{=0 \text{ pour } R \text{ assez grand}} - \int_{\{\|x\|_2=\varepsilon\}} \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial f}{\partial r}\right)\mathrm{dr}\,.$$

On a $\Delta f = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\{\|x\|_2=\varepsilon\}} f\Delta\varphi\,\mathrm{dx} &= -\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\log(\varepsilon)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta) - \frac{1}{2\pi\varepsilon}\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\right]\varepsilon\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta}_{\xrightarrow{\varepsilon\to0}0} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta}_{\xrightarrow{\varepsilon\to0}\varphi(0)}\,.\end{aligned}$$

On a $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et donc $f\Delta\varphi$ est intégrable. Il suit

$$\int_{\{\|x\|_2<\varepsilon\}} f\Delta\varphi\,\mathrm{dx} \xrightarrow{\varepsilon\to0} \int_{\mathbb{R}^2} f\Delta\varphi\,\mathrm{dx}\,.$$

Finalement, on obtient en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ :

$$\int_{R^2} f\Delta\varphi\,\mathrm{dx} = \varphi(0),$$

c'est-à-dire $\langle [f], \Delta\varphi\rangle = \varphi(0) \implies \langle \Delta[f], \varphi\rangle = \varphi(0) \implies \Delta[f] = \delta_0$. □

Soit $d \geq 3$. Soit $E = [f]$ où $f(x) = -\frac{1}{d(d-2)V_d}\frac{1}{r^{d-2}}$, $r = \|x\|_2$ où $V_d$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^2$. Alors, on a $\Delta E = \delta_0$.

Exercice : L'opérateur de la chaleur. On se place dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Soit $C = \dfrac{\partial}{\partial t} - c\displaystyle\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial t} - c\Delta$, $c > 0$ et $\Gamma(t,x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)\dfrac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{4ct}}}{4c\pi t}$.

Alors $C(\Gamma) = \delta$.

# 5. Convolution des distributions

## 5.1. Produit tensoriel

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ deux ouverts. On pose $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

**Définition 5.1 :** Pour $\varphi$ définie sur $\Omega_1$ et $\psi$ définie sur $\Omega_2$, on note

$$(\varphi \otimes \psi)(x,y) := \varphi(x)\psi(y), \qquad (x,y) \in \Omega.$$

**Proposition 5.2 :** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors l'application $\psi : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ avec $y \mapsto \langle T(\cdot), \phi(\cdot, y)\rangle$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega_2)$ et*

$$\frac{\partial^{|q|}}{\partial y^{|q|}} \left(\langle T, \phi(\cdot, y)\rangle\right) = \langle T, \frac{\partial^{|q|}}{\partial y^{|q|}} \phi(\cdot, y)\rangle \qquad \forall q \in \mathbb{N}^{d_2}$$

où $\dfrac{\partial^{|q|}}{\partial y^{|q|}} = \dfrac{\partial^{|q|}}{\partial y_1^{q_1} \cdots \partial y_{d_2}^{q_{d_2}}}$.

*Démonstration.* Ils existent deux compacts $K_1 \subset \Omega_1$, $K_2 \subset \Omega_2$ tels que $\operatorname{supp} \phi \subset K_1 \times K_2$. On a $\operatorname{supp} \psi \subset K_2$. Montrons que $\psi$ est continue. Soit $(y_n)_n$ une suite dans $\Omega_2$ qui converge vers $y \in \Omega_2$, et soient $\varphi_{y_n} = \phi(\cdot, y_n)$ et $\varphi_y = \phi(\cdot, y)$. On a

- $\forall n$ : $\operatorname{supp} \varphi_{y_n} \subset K_1$ et $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K_1$
- $\forall p \in \mathbb{N}^d$ : $\dfrac{\partial^{|p|}}{\partial y^{|p|}} \varphi_{y_n} = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial y^{|p|}} \phi(\cdot, y_n) \to \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial y^{|p|}} \phi(\cdot, y) = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial y^{|p|}} \varphi_n$ uniformément car les fonctions $\dfrac{\partial^{|p|}}{\partial y^{|p|}} \varphi$ sont uniformément continues.

Comme $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ : $\langle T, \varphi_{y_n}\rangle \to \langle T, \varphi_y\rangle$ et donc $\psi$ est continue.

Soit $e_j = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow j}{1}, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^{d_2}$. D'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\left| \frac{\phi(x, y + te_j) - \phi(x,y)}{t} - \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(x,y) \right| \leq \sup_{s \in [0,t]} \left| \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(x, y + se_j) - \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(x,y) \right|.$$

Comme $\dfrac{\partial \phi}{\partial y_j}$ est uniformément continue, $\dfrac{\phi(\cdot, y + te_j) - \phi(\cdot, y)}{t} - \dfrac{\partial \phi}{\partial y_j}(\cdot, y) \xrightarrow{t \to 0} 0$ uniformément sur $\Omega_1$.

Les fonctions $\dfrac{\phi(\cdot, y + te_j) - \phi(\cdot, y)}{t} - \dfrac{\partial \phi}{\partial y_j}(\cdot, y)$ ont toutes leur support inclus dans $K_1$. Quand $t \to 0$ les fonctions convergent vers $\dfrac{\partial \phi}{\partial y_j}(\cdot, y)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_1)$. D'où

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\langle T, \phi(\cdot, y_j)\rangle\right) = \lim_{t \to 0} \left( \langle T, \frac{\phi(\cdot, y + te_j) - \phi(\cdot, y)}{t} \rangle \right) = \langle T, \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(\cdot, y)\rangle.$$

Donc l'application est $\mathcal{C}^1$ et on continue la preuve par récurrence sur $|q|$. □

**Lemme 5.3 :** *Soient* $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. *Pour* $\varepsilon > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$, *on pose*

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon^d \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \varphi(x - \varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu).$$

*Alors* $g_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi$ *et* $g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \varphi * \psi$ *dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

*Démonstration.* Le support de $\psi$ est compact et donc $g_\varepsilon = \varepsilon^d \sum_{\nu \in I} \varphi(x - \varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ où $I \subset \mathbb{Z}^d$ est un ensemble fini.

Pour tout $\nu$ : l'application $x \mapsto \varphi(x - \varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu)$ est à support contenu dans $\operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi$ et il s'ensuit $\operatorname{supp}(g_\varepsilon) \subset \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi$.

Soit $p \in \mathbb{N}^d$. On a $D^p g_\varepsilon(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} D^p\varphi(x - \varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu)$ ce qui est une somme finie. Par le théorème des accroissements finis, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left|D^p\varphi(x-y)\psi(y) - D^p\varphi(x-y')\psi(y')\right| \leq c\left\|y - y'\right\|_\infty . \tag{$*$}$$

On pose $Q_\nu^\varepsilon = \prod_{j=1}^{d} [\varepsilon\nu_j, \varepsilon(\nu_j + 1)]$ avec $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$. On a

$$(D^p\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} D^p\varphi(x-y)\psi(y)\,\mathrm{dy} = \sum_{\|\nu\|_\infty \leq \frac{N}{\varepsilon}+1} \int_{Q_\nu^\varepsilon} D^p\varphi(x-y)\psi(y)\,\mathrm{dy}$$

où $N = \max_{x \in \operatorname{supp}\psi} \|x\|_\infty$. Alors, il suit avec $\varepsilon^d = \int_{Q_\nu^\varepsilon} \mathrm{dy}$

$$\begin{aligned}
|(D^p\varphi * \psi)(x) - D^p g_\varepsilon(x)| &\leq \sum_{\|\nu\|_\infty \leq \frac{N}{\varepsilon}+1} \left| \int_{Q_\nu^\varepsilon} D^p\varphi(x-y)\psi(y)\,\mathrm{dy} - \varepsilon^d D^p\varphi(x-\varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu)\right| \mathrm{dy} \\
&\leq \sum_{\|\nu\|_\infty \leq \frac{N}{\varepsilon}+1} \int_{Q_\nu^\varepsilon} |D^p\varphi(x-y)\psi(y) - D^p\varphi(x-\varepsilon\nu)\psi(\varepsilon\nu)|\,\mathrm{dy} \\
&\leq c \sum_{\|\nu\|_\infty \leq \frac{N}{\varepsilon}+1} \|y - \varepsilon\nu\|_\infty\,\mathrm{dy} \qquad (\text{par } (*)) \\
&\leq c\left(2\left(\tfrac{N}{\varepsilon}+1\right)+1\right)^d \varepsilon^{d+1}.
\end{aligned}$$

Donc $D^p g_\varepsilon \to D^p\varphi * \psi$ uniformément. Car $\operatorname{supp}(D^p g\varepsilon) \subset K$ et $\operatorname{supp}(D^p\varphi * \psi) \subset K$ où $K = \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi$, il suit $g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \varphi * \psi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 5.4 : Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ouvert et $K \subset \Omega$ compact. Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on pose $\delta(\varphi, \psi) = \sum_{k \geq 0} 2^{-m} \min\{\mathbb{N}_m(\varphi - \psi), 1\}$. $\delta$ est une distance sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Soit $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement s'il existe $K \subset \Omega$ compact tel que

- $\forall n$ : $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset K$
- $\delta(\varphi_n, \varphi) \to 0$

**Théorème 5.5 :** *Soient $\Omega_1$ un ouvert de $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\Omega_2$ un ouvert de $\mathbb{R}^{d_2}$. On pose*

$$E = \operatorname{span}\{\varphi_1 \otimes \varphi_2,\ \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1),\ \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)\}.$$

*Alors $E$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, c'est-à-dire pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n \subset E$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

*Démonstration.* Soit $(\chi_n^1)_n$ une suite régularisante dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $(\chi_n^2)_n$ une suite régularisante dans $\mathbb{R}^{d_2}$. Alors $(\chi_n^1 \otimes \chi_n^2)_n$ est une suite régularisante dans $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Ils existent $K_1 \subset \Omega_1$, $K_2 \subset \Omega_2$ compacts tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset K_1 \times K_2$. De plus, ils existent $K_1' \subset \Omega_1$, $K_2' \subset \Omega_2$ compacts tels que $K_1 \subset K_1'^{\circ}$ et $K_2 \subset K_2'^{\circ}$.

Pour $N$ assez grand et $n \geq N$, on a $K_1 + \operatorname{supp}(\chi_n^1) \subset K_1'$ et $K_2 + \operatorname{supp}(\chi_n^2) \subset K_2'$.

Soit $\eta > 0$. Donc il existe $n \geq N$ tel que $\delta(\varphi * (\chi_n^1 \otimes \chi_n^2), \varphi) < \frac{\eta}{2}$ car $\varphi * (\chi_n^1 \otimes \chi_n^2) \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.[22] D'après le lemme 5.3, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\delta\left(g_\varepsilon, \varphi * (\chi_n^1 \otimes \chi_n^2)\right) < \frac{\eta}{2}$ où

$$g_\varepsilon(x,y) = \sum_{\substack{\nu_1 \in \mathbb{Z}^{d_1} \\ \nu_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}}} \underbrace{\chi_n^1(x - \varepsilon\nu_1)\chi_n^2(y - \varepsilon\nu_2)\varphi((\varepsilon\nu_1, \varepsilon\nu_2))}_{\in E}$$

(ce qui est une somme finie.) Or $\delta(g_\varepsilon, \varphi) < \eta$.

Alors, on vient de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $h \in E$ telle que $\operatorname{supp} h \subset K_1' \times K_2'$ et $\delta(h, \varphi) < \eta$. □

**Théorème 5.6 :** *Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Alors, il existe une unique distribution $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que pour toute $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et pour toute $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ :*

$$\langle T_1 \otimes T_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle T_1, \varphi_1 \rangle \langle T_2, \varphi_2 \rangle.$$

*De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ :*

$$\langle T_1 \otimes T_2, \varphi \rangle = \langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle = \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

*où on note $\langle T_2(y), \varphi(x,y) \rangle = \langle T_2, \varphi(x,y) \rangle$.*

*Démonstration. (Unicité)* $T_1 \otimes T_2$ est définie d'une façon unique sur

$$E = \operatorname{span}\{\varphi_1 \otimes \varphi_2,\ \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1),\ \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)\}.$$

Comme $E$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ (selon le théorème 5.5), $T_1 \otimes T_2$ est unique.

*(Existence)* Soit $L : \varphi \mapsto \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$ définie sur $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Montrons que $L$ est une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

[22] cf. paragraphe 4.3.2

On a vu dans la proposition 5.2 que la fonction $y \mapsto \langle T_1(x), \varphi(x,y)\rangle$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega_2)$, donc elle est bien définie.

Soit $K \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ un compact. Alors, ils existent deux compacts $K_1 \subset \Omega_1$ et $K_2 \subset \Omega_2$ tels que $K \subset K_1 \times K_2$. Par définition des distributions $T_1$ et $T_2$

$$\begin{array}{lll} \exists m_1 \geq 0 \ \exists c_1 & \text{tels que} & \forall \varphi_1 \in \mathcal{D}_{K_1}(\Omega_1) : \ |\langle T_1, \varphi_1\rangle| \leq c_1 N_{m_1}(\varphi_1) \\ \exists m_2 \geq 0 \ \exists c_2 & \text{tels que} & \forall \varphi_2 \in \mathcal{D}_{K_2}(\Omega_2) : \ |\langle T_2, \varphi_2\rangle| \leq c_2 N_{m_2}(\varphi_2) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} |\langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle| &\leq c_2 N_{m_2}\Big(\langle T_1(x), \varphi(x,y)\rangle\Big) \\ &\leq c_2 \sup_y \sup_{|q|\leq m_2} \left| \frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q} \langle T_1(x), \varphi(x,y)\rangle \right| \\ &\leq c_2 \sup_y \sup_{|q|\leq m_2} \left| \langle T_1(x), \frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q} \varphi(x,y)\rangle \right| \\ &\leq c_2 c_1 \sup_{x,y} j \sup_{|q|\leq m_2} \sup_{|p|\leq m_1} \left| \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p} \frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q} \varphi(x,y) \right| \\ &\leq c_2 c_1 \sup_{x,y} N_{m_1+m_2}(\varphi) \end{aligned}$$

Donc $L$ est une distribution bien définie. Il est vrai que

$$\langle L, \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle = \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi_1(x)\varphi_2(y)\rangle\rangle = \langle T_2(y), \varphi_2(y)\langle T_1, \varphi_1\rangle\rangle = \langle T_1, \varphi_1\rangle\langle T_2, \varphi_2\rangle.$$

On vérifie de la même façon que $L'$ est une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et que

$$\langle L', \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle = \langle T_1(y), \langle T_2(x), \varphi_1(x)\varphi_2(y)\rangle\rangle = \langle T_1, \varphi_1\rangle\langle T_2, \varphi_2\rangle.$$

Par unicité, on a que $L = L'$. □

Remarque 5.7 : Si $\Omega_1 = \Omega_2$ et si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, on a $\langle T_1 \otimes T_2, \varphi\rangle = \langle T_2 \otimes T_1, \varphi\rangle$.

**Proposition 5.8 :** *Soit* $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *et* $T_2 \in \Omega_2$. *Alors*

*(i)* $\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) = \operatorname{supp}(T_1) \times \operatorname{supp}(T_2)$

*(ii)* $\forall p \in \mathbb{N}^{d_1} \ \forall q \in \mathbb{N}^{d_2} : \ \dfrac{\partial^{|p|+|q|}}{\partial x^p \partial y^q}(T_1 \otimes T_2) = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x^p} T_1 \otimes \dfrac{\partial^{|q|}}{\partial y^q} T_2.$

*Démonstration.* (i) '$\subset$': Supposons que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, il soit vrai que $\operatorname{supp}\varphi \cap (\operatorname{supp} T_1 \times \Omega_2) = \emptyset$. On a $\langle T_1 \otimes T_2, \varphi\rangle = \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle$.

Pour tout $y \in \Omega$ : $\operatorname{supp}\varphi(\cdot, y) \cap \operatorname{supp} T_1 = \emptyset$ et alors $\langle T_1(x), \varphi(x,y)\rangle = 0$. Il suit que $\langle T_1 \otimes T_2, \varphi\rangle = 0$. Donc $\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) \subset \operatorname{supp} T_1 \times \Omega_2$.

On a de même $\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) \subset \Omega_1 \times \operatorname{supp} T_2$ et on obtient finalement

$$\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) \subset \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2.$$

'$\supset$': Soit $(x,y) \in \operatorname{supp}(T_1)\times\operatorname{supp}(T_2)\setminus\operatorname{supp}(T_1\otimes T_2)$. Soit $\mathcal{O}\subset\Omega$ un ouvert tel que $(x,y)\in\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}\cap\operatorname{supp}(T_1\otimes T_2)=\emptyset$. Alors ils existent deux ouverts $\mathcal{O}_1\subset\Omega_1$, $\mathcal{O}_2\subset\Omega_2$ avec $x\in\mathcal{O}_1$ et $y\in\mathcal{O}_2$ tels que $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$ et $(\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2)\cap\operatorname{supp}(T_1\otimes T_2)=\emptyset$.

Ils existent alors $\varphi_1\in\mathcal{D}(\Omega_1)$ et $\varphi_2\in\mathcal{D}(\Omega_2)$ telles que

$$\langle T_1,\varphi_1\rangle\neq 0 \qquad \text{et} \qquad \langle T_2,\varphi_2\rangle\neq 0.$$

On obtient $\langle T_1\otimes T_2,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle=\langle T_1,\varphi_1\rangle\langle T_2,\varphi_2\rangle\neq 0$ ce qui implique que $(x,y)$ appartient à $\operatorname{supp}(T_1\otimes T_2)$. Ceci est une contradiction.

(ii) Soient $\varphi_1\in\mathcal{D}(\Omega_1)$ et $\varphi_2\in\mathcal{D}(\Omega_2)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{|p|+|q|}}{\partial x^p\partial y^q}(T_1\otimes T_2) &= (-1)^{|p|+|q|}\langle T_1\otimes T_2,\frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}\varphi_1\otimes\frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q}\varphi_2\rangle\\
&= (-1)^{|p|+|q|}\langle T_1,\frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}\varphi_1\rangle\langle T_2,\frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q}\varphi_2\rangle\\
&= \langle\frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}T_1,\varphi_1\rangle\langle\frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q}T_2,\varphi_2\rangle\\
&= \langle\frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}T_1\otimes\frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q}T_2,\varphi_1\otimes\varphi_2\rangle
\end{aligned}$$

Donc on a $\frac{\partial^{|p|+|q|}}{\partial x^p\partial y^q}(T_1\otimes T_2)=\frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}T_1\otimes\frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q}T_2$ sur $E$ ce qui implique l'égalité sur $\mathcal{D}(\Omega_1\times\Omega_2)$. □

## 5.2. Convolution des distributions

**Définition 5.9 :** (i) Soit $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution à support compact. On note $\mathcal{E}(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\Omega$.

(ii) Soit $(\varphi_n)_n$ une suite dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Elle *converge dans* $\mathcal{E}(\Omega)$ *vers* $\varphi\in\mathcal{E}(\Omega)$, si pour tout $K\subset\Omega$ et pour tout $p\in\mathbb{N}^d$ : $D^p\varphi_n\xrightarrow{n\to\infty}D^p\varphi$ uniformément sur $K$.

Remarque 5.10 : (i) Soient $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution à support compact et $\rho\in\mathcal{D}(\Omega)$ avec $\rho=1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp}T$.

Alors, pour toute $\varphi\in\mathcal{E}(\Omega)$, l'application $\mathcal{E}(\Omega)\to\mathbb{C}$ avec $\varphi\mapsto\langle T,\rho\varphi\rangle$ est continue. En effet :

Si $\varphi_n\to\varphi$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ : $\rho\varphi_n\to\rho\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc $\langle T,\rho\varphi_n\rangle\to\langle T,\rho\varphi\rangle$.

(ii) Cette application est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$ et on note $\mathcal{E}'(\Omega)$ *le dual topologique de* $\mathcal{E}(\Omega)$. $\mathcal{E}'(\Omega)$ s'identifie avec l'ensemble des distributions à support compact :

Si $T\in\mathcal{E}'(\Omega)$, on écrira pour toute $\varphi\in\mathcal{E}(\Omega)$ : $\langle T,\varphi\rangle:=\langle T,\rho\varphi\rangle$ où $\rho\in\mathcal{D}(\Omega)$ avec $\rho=1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp}T$.

**Proposition 5.11 :** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert,* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ *telle que* $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi$ *est compact. De plus, soit* $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\rho = 1$ *sur un voisinage de* $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi$.

*Alors* $\langle T, \rho\varphi \rangle$ *est indépendante de* $\rho$. *De plus, si* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *on a* $\langle T, \rho\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ *et on notera* $\langle T, \varphi \rangle := \langle T, \rho\varphi \rangle$.

*Démonstration.* Premièrement, prenons $\gamma \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\gamma = 0$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\gamma\varphi) \subset \operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\gamma &\subset \operatorname{supp}\varphi \cap \Big(\mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi)\Big) \\ &\subset \operatorname{supp}\varphi \cap \Big(\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp} T\Big) \subset \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp} T \\ \implies \langle T, \gamma\varphi \rangle = 0.&\end{aligned}$$

Soient maintenant $\rho_1$, $\rho_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\rho_1 = \rho_2$ sur un voisinage de $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} T$. Alors $\rho_1 - \rho_2 = 0$ sur un voisinage de $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} T$. D'après la première partie de cette preuve il suit que $\langle T, (\rho_1 - \rho_2)\varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\langle T, \rho_1\varphi \rangle = \langle T, \rho_2\varphi \rangle$.

De plus, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \rho\varphi \rangle + \underbrace{\langle T, (1-\rho)\varphi \rangle}_{=0} = \langle T, \rho\varphi \rangle$$

car $(1 - \rho) = 0$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi$. D'où le résultat. □

**Définition 5.12 :** Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On dit que $T_1$ et $T_2$ sont convolables si pour tout $K$ compact de $\mathbb{R}^d$ l'ensemble

$$\widetilde{K} = \big\{(x, y) \subset \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2,\ x + y \in K\big\}$$

est une partie compact de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Lorsque $T_1$ est $T_2$ sont convolables, on peut définir la convolée de $T_1$ et $T_2$, notée $T_1 * T_2$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \ \langle T_1 * T_2, \varphi \rangle := \langle T_1(x) \otimes T_2(y), \varphi(x + y) \rangle.$$

$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle$ est bien définie car pour $K = \operatorname{supp}\varphi$, on a

$$\underbrace{\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) \cap \operatorname{supp}(\varphi^{\triangle})}_{\text{compact}} = \big(\operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2\big) \cap \operatorname{supp}(\varphi^{\triangle}) \subset \widetilde{K}$$

où $\varphi^{\triangle}(x, y) = \varphi(x + y)$.

**Proposition 5.13 :** *Soient* $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *convolables. Alors* $T_1 * T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

*Démonstration.* Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on pose $\varphi^{\triangle}(x, y) = \varphi(x + y)$.

Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) \cap \operatorname{supp}\varphi^{\triangle} = (\operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2) \cap \operatorname{supp}\varphi^{\triangle} \subset \widetilde{K}$$

avec $\widetilde{K} = \{(x,y) \in \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2,\ x+y \in K\}$. Alors, il suit que $\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) \cap \operatorname{supp} \varphi^{\triangle}$ compact.

On a $\langle T_1 \otimes T_2, \varphi \rangle = \langle T_1(x) \otimes T_2(y), \rho(x,y)\varphi(x+y)\rangle$ où $\rho = 1$ dans un voisinage de $\widetilde{K}$. De plus, ils existent $m = m_K,\ c = c_K$ tels que

$$\begin{aligned} |\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle| &= \langle T_1(x) \otimes T_2(y), \rho(x,y) \cdot \varphi^{\triangle}(x,y)\rangle \\ &\leq c_K \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \sup_{\substack{p,\,q\in\mathbb{N}^d \\ |p|+|q|\leq m}} \left| \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p} \frac{\partial^{|q|}}{\partial y^q} (\rho\varphi^{\triangle})(x,y) \right| \end{aligned}$$

(car $T_1 \otimes T_2$ est une distribution)

$$\leq c'_K \sup_{x\in K} \sup_{\substack{l\in\mathbb{N}^d \\ |l|\leq m}} \left| D^l \varphi(x) \right|.$$

D'où $T_1 * T_2$ est une distribution. $\square$

Remarque 5.14 : (i) Si $\operatorname{supp} T_1$ ou $\operatorname{supp} T_2$ est compact, alors $T_1$ et $T_2$ sont convolables.

En effet : Supposons que ce soit $\operatorname{supp} T_1$ qui est compact. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact.

$$\widetilde{K} = \Big\{(x,y) \in \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2,\ x+y \in K\Big\} \subset \underbrace{\operatorname{supp} T_1}_{\text{compact}} \times \underbrace{(K - \operatorname{supp} T_1)}_{\text{compact}}$$

(ii) Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $T_1$ et $T_2$ sont convolables si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

a) $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp} T_1 \subset [a, \infty)$, $\operatorname{supp} T_2 \subset [a,\infty)$.

b) $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{supp} T_1 \subset (-\infty, b]$, $\operatorname{supp} T_2 \subset (-\infty, b]$.

En particulier : Si $\operatorname{supp} T_1 \subset [0,\infty)$, $\operatorname{supp} T_2 \subset [0,\infty)$, alors $T_1$ et $T_2$ sont convolables.

En effet : Soient $\operatorname{supp} T_1 \subset \mathbb{R}_+$, $\operatorname{supp} T_2 \subset \mathbb{R}_+$ et $K \subset \mathbb{R}$ compact. Alors

$$\widetilde{K} \subset [0,r] \times [0,r] \qquad \text{où } r = \max K \implies \widetilde{K} \text{ compact.}$$

Remarque 5.15 : Soient $T_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.[23] On a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle = \langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle$$

et donc $\langle T_1(x), \langle T_2(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle$ est bien défini car la fonction $x \mapsto \langle T_2(y), \varphi(x+y)\rangle$ appartient à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est $T_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ ainsi que $\langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle$ est bien défini car la fonction $y \mapsto \langle T_1(x), \varphi(x+y)\rangle$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

**Théorème 5.16 :** *Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ convolables. Alors*

[23] On a vu qu'ils sont convolables, cf. l'exemples ci-dessus.

*(i)* $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$ *(commutativité)*

*(ii)* $\operatorname{supp}(T_1 * T_2) \subset \operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2$

*(iii)* $\forall p \in \mathbb{N}^d$ : $D^p(T_1 * T_2) = D^pT_1 * T_2 = T_1 * D^pT_2$.

*Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $p \in \mathbb{N}^d$. *Alors* $\delta_0 * T = T * \delta_0 = T$ *et* $D^p\delta_0 * T = T * D^p\delta_0 = D^pT$.

*Démonstration.* (i) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ avec $\rho = 1$ sur un voisinage de $\widetilde{K} = \{(x,y) \in \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2,\ x+y \in K\}$.

On a

$$\begin{aligned}
\langle T_1 * T_2, \varphi\rangle &= \langle T_1(x) \otimes T_2(y), \rho(x,y)\varphi(x+y)\rangle \\
&= \langle T_1(x), \langle T_2(y), \rho(x,y)\varphi(x+y)\rangle\rangle \\
&= \langle T_1(x), \langle T_2(y), \widetilde{\rho}(y,x)\varphi(x+y)\rangle\rangle \qquad \text{où } \widetilde{\rho}(y,x) = \rho(x,y) \\
&= \langle T_2(y) \otimes T_1(x), \widetilde{\rho}(y,x)\varphi(y+x)\rangle \\
&= \langle T_2 * T_1, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

(ii) On va d'abord montrer que $\operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2$ est un fermé.

Soit $(x_n, y_n) \in \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2$ telle que $x_n + y_n \xrightarrow{n\to\infty} z \in \mathbb{R}^d$.

Soient $K = \{x_n + y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ et $\widetilde{K} = \{(x,y) \in \operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2,\ x+y \in K\}$ ce qui sont deux compacts.

On a $(x_n, y_n) \in \widetilde{K}$. Alors, il existe $(n_k) \nearrow$ telle que $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x,y)$. Donc

$$\left.\begin{array}{l} x_{n_k} + y_{n_k} \to z \\ x_{n_k} + y_{n_k} \to x + y \end{array}\right. \Longrightarrow z = x + y.$$

Puisque $\operatorname{supp} T_1$ est fermé : $x \in \operatorname{supp} T_1$ et puisque $\operatorname{supp} T_2$ est fermé : $y \in \operatorname{supp} T_2$. D'où $z = x + y \in \operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2\}$. Soit $K = \operatorname{supp}\varphi$. Donc, $\widetilde{K} = \emptyset$. Il s'ensuit $(\operatorname{supp} T_1 \times \operatorname{supp} T_2) \cap \operatorname{supp}\varphi^{\triangle} = \emptyset$ où $\varphi^{\triangle}(x,y) = \varphi(x+y)$

$$\Longrightarrow \operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) \cap \operatorname{supp}\varphi^{\triangle} = \emptyset \Longrightarrow \langle T_1 \otimes T_2, \varphi^{\triangle}\rangle = 0 \Longrightarrow \langle T_1 * T_2, \varphi\rangle = 0.$$

D'où $\operatorname{supp}(T_1 * T_2) = \operatorname{supp} T_1 + \operatorname{supp} T_2$.

(iii) Soit $p \in \mathbb{N}^d$. On a

$$\begin{aligned}
\langle D^p(T_1 * T_2), \varphi\rangle &= (-1)^{|p|}\langle T_1 * T_2, D^p\varphi\rangle = (-1)^{|p|}\langle T_1(x) \otimes T_2(y), D^p\varphi(x+y)\rangle \\
&= (-1)^{|p|}\langle T_1(x) \otimes T_2(y), \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}\varphi(x+y)\rangle \\
&= \langle \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}\big(T_1(x) \otimes T_2(y)\big), \varphi(x+y)\rangle \\
&= \langle \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}\big(T_1 * T_2\big), \varphi(x+y)\rangle = \langle D^pT_1 * T_2, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \langle D^p(T_1 * T_2), \varphi\rangle = \langle D^pT_1 * T_2, \varphi\rangle$$

De même, $D^p(T_1 * T_2) = T_1 * D^p T_2$.

De plus, on a

$$\langle \delta_0 * T, \varphi \rangle = \langle T(y), \langle \delta_0(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(y), \varphi(y) \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

d'où $\delta_0 * T = T = T * \delta_0$.

Donc, $D^p(T) = D^p(\delta_0 * T) = D^p\delta_0 * T = T * D^p\delta_0$. □

Remarque 5.17 : (i) *distributivité* Si $T_1$ et $T_2$, respectif $T_1$ et $T_3$ sont convolables, alors $T_1$ et $T_2 + T_3$ sont convolables et on a $T_1 * (T_2 + T_3) = T_1 * T_2 + T_1 * T_3$.

(ii) On a dans $\mathbb{R}$ avec $y = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ :

$$\underbrace{([1] * \delta_0')}_{=0} * [y] = 0 \qquad \text{et} \qquad [1] * \underbrace{(\delta_0' * [y])}_{=\delta_0} = [1],$$

donc on n'a en général pas d'associativité.

(iii) Soient $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $f_1$ ou $f_2$ soit à support borné. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle [f_1] * [f_2], \varphi \rangle &= \langle [f_1], \int_{\mathbb{R}} f_2(y)\varphi(x+y)\,\mathrm{dy} \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_1(x) \Big( \int_{\mathbb{R}} f_2(y)\varphi(x+y)\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_1(x) \Big( \int_{\mathbb{R}} f_2(u-x)\varphi(u)\,\mathrm{du} \Big)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \Big( \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(u-x)\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{du} \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)(f_1 * f_2)(u)\,\mathrm{du} = \langle [f_1 * f_2], \varphi \rangle
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [f_1] * [f_2] = [f_1 * f_2]$$

**Proposition 5.18 :** *Soient* $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *dont au moins deux sont à support compact. Alors* $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$.

*Démonstration.* Soient sans perte de généralité $T_2, T_3 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

$$\langle T_1 * (T_2 * T_3), \varphi \rangle = \langle T_1(x), \langle (T_2 * T_3)(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

où $x \mapsto \langle (T_2 * T_3)(y), \varphi(x+y) \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (cf. proposition 5.2)

$$\begin{aligned}
&= \langle T_1(x), \langle T_2(z), \langle T_3(y), \varphi(x+y+z) \rangle \rangle \rangle \qquad \text{où } T_3 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \\
&= \langle (T_1 * T_2)(u), \langle T_3(y), \varphi(y+u) \rangle \rangle \\
&= \langle (T_1 * T_2) * T_3, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

□

**Proposition 5.19 :** *Soit* $(T_n)_n$ *une suite dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *telle que*

- *il existe* $K \subset \mathbb{R}^d$ *compact tel que* $\operatorname{supp} T_n \subset K$ *pour tous* $n$
- $T_n \to T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

*Alors pour toute* $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ : $T_n * S \to T * S$.

*Démonstration.* Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\langle T_n * S, \varphi \rangle = \langle T_n(x), \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T_n(x), \rho(x) \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

pour $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\rho = 1$ sur un voisinage de $K$. Il s'ensuit

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(x), \rho(x) \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

car $\operatorname{supp} T \subset K$. $\big($Si $\operatorname{supp} \varphi \cap K = \emptyset$ : $\langle T_n, \varphi \rangle = 0 \to \langle T, \varphi \rangle = 0.\big)$ □

**Théorème 5.20 :** *Soit* $P(D)$ *un opérateur differentiel à coefficients constants,* $E$ *la solution fondamentale de* $P(D)$ *et* $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $T_0 = E * S$ *satisfait* $P(D)T_0 = S$.

*De plus, l'ensemble des solutions* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *de l'équation* $P(D)T_0 = S$ *est égale à*

$$\big\{ T = T_0 + U,\ U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \text{ telle que } P(D)U = 0 \big\}.$$

*Démonstration.* On a $P(D)E = \delta_0$ par définition. Donc

$$P(D)T_0 = P(D)(E * S) = P(D)E * S = \delta_0 * S = S.$$

D'autre part $P(D)T = S \iff P(D)U = 0$ où $U = T - \underbrace{E * S}_{=T_0}$. □

Exemple : Soit $P(D) = a_0 + a_1 D + \cdots + a_m D^m$ avec $a_m \neq 0$. Soit $f$ une solution sur $\mathbb{R}^d$ de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} P(D)f = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_m f^{(m)} &= 0 \\ f(0) = \cdots = f^{(m-2)}(0) &= 0 \\ f^{(m-1)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Soit $E = \frac{1}{a_m} y \cdot f = \frac{1}{a_m} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} f$. $E$ est solution fondamentale de $P(D)$ (car $P(D)E = \delta_0$ par la formule de sauts).

Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+$. On a $P(D)(E * S) = S$.

## 5.3. Convolution d'une distribution et d'une fonction

**Proposition 5.21 :** *Soient* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ *et* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *Si* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, *alors* $[f] * T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, *c'est-à-dire* $[f] * T = [g]$ *avec* $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

*Démonstration.* Supposons que $\operatorname{supp} T$ soit compact, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ et soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\rho = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$. On a

$$\begin{aligned}
\langle [f] * T, \varphi \rangle &= \langle T(y), \rho(y) \langle [f](x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T(y), \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x+y)\rho(y)\,\mathrm{dx} \rangle \\
&= \langle T(y), \int_{\mathbb{R}^d} f(u-y)\varphi(u)\rho(y)\,\mathrm{du} \rangle \\
&= \langle T(y), \int_{\mathbb{R}^d} f(-u-y)\varphi(-u)\rho(y)\,\mathrm{du} \rangle && \text{par } u \mapsto -u \\
&= \langle T(y), \rho(y) \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(u+y)\tilde{\varphi}(u)\,\mathrm{du} \rangle && \text{où } \tilde{h}(x) = h(-x) \\
&= \langle T(y), \rho(y) \langle [\tilde{\varphi}](u), \tilde{f}(u+y) \rangle \rangle \\
&= \langle [\tilde{\varphi}] * T, \tilde{f} \rangle && \text{où } [\tilde{\varphi}] * T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \\
&= \langle [\tilde{\varphi}](u), \langle T(y), \tilde{f}(u+y) \rangle \rangle \\
&= \int \tilde{\varphi}(u)\tilde{g}(u)\,\mathrm{du} && \text{avec } \tilde{g}(u) = \langle T(y), \tilde{f}(u+y) \rangle \\
&= \int \varphi(u) g(u)\,\mathrm{du} && \text{par } u \mapsto -u
\end{aligned}$$

où $g(u) = \tilde{g}(-u) = \langle T(y), \tilde{f}(-u+y) \rangle = \langle T(y), f(u-y) \rangle$.

$$\Longrightarrow \langle [f] * T, \varphi \rangle = \langle [g], \varphi \rangle$$

et donc $[f] * T = [g]$. □

**Théorème 5.22 :** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Alors, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, c'est-à-dire toute distribution sur $\Omega$ est limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ :*

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ \exists (\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega) \qquad \textit{telle que} \qquad [\varphi_n] \xrightarrow{n \to \infty} T \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

*Démonstration.* Sot $(K_n)_n$ une suite exhaustive de compacts de $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ avec

$$K_n = \overline{\mathcal{B}(0,n)} \cap \{x \in \mathbb{R}^d,\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Soit $\rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\rho_n = 1$ sur $K_n$, $(\chi_n)_n$ une suite régularisante de $\mathbb{R}^d$ et $\chi_{\rho_n}$ une sous-suite telle que $\operatorname{supp} \rho_n + \operatorname{supp} \chi_{\rho_n} \subset \Omega$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le support de $\rho_n T$ est compact dans $\Omega$. D'après la proposition 5.21 $\rho_n T * [\chi_{\rho_n}] = [\psi_n]$ avec $\psi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. Comme $\operatorname{supp}(\rho_n T * [\chi_{\rho_n}])$ est compact, $\operatorname{supp} \psi_n$ est compact. Donc $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Montrons que $[\psi_n] \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ On a

$$\begin{aligned}
\langle [\psi_n], \varphi \rangle &= \langle \rho_n T * [\chi_{\rho_n}], \varphi \rangle \\
&= \langle (\rho_n T)(x), \langle [\chi_{\rho_n}](y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T(x), \rho_n(x) \int \chi_{\rho_n}(y)\varphi(x+y)\,\mathrm{dy} \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle T(x), \rho_n(x), \int \chi_{\rho_n}(-y)\varphi(x-y)\,\mathrm{dy}\rangle$$
$$= \langle T(x), \rho(x)(\varphi * \tilde{\chi}_{\rho_n})(x)\rangle \qquad \text{avec } \tilde{\chi}_{\rho_n}(x) = \chi_{\rho_n}(x)$$

Pour $n$ assez grand on a $\operatorname{supp}(\varphi * \tilde{\chi}_{\rho_n}) \subset K$ où $K \subset \Omega$ compact tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, et $\operatorname{supp}(\varphi * \tilde{\chi}_{\rho_n}) \subset K_n$. Comme $\rho = 1$ sur $K_n$, on a $\rho_n(\varphi * \tilde{\chi}_{\rho_n}) = \varphi * \tilde{\chi}_{\rho_n}$ pour $n$ assez grand.

Donc $\langle [\psi_n], \varphi\rangle = \langle T, \varphi * \tilde{\chi}_n\rangle$ pour $n$ assez grand. Or $\varphi * \tilde{\chi}_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ puisque $\tilde{\chi}_n$ est une suite régularisante. Donc

$$\langle [\psi_n], \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \implies [\psi_n] \to T \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

□

# 6. Distributions tempérées

## 6.1. Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

**Définition 6.1 :** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall p,\, q \in \mathbb{N}^d \ : \ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^q D^p \varphi(x)| < \infty.$$

Un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction infiniment différentiable à croissance rapide ainsi que ses dérivées.

Rappel : $x^q D^p \varphi(x) = x_1^{q_1} \cdots x_d^{q_d} \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}} \varphi(x)$

Exemple : Premièrement, on a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

Deuxièmement, soient $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}_+$, $q \in \mathbb{N}^d$ et $\varphi(x) = x_1^{q_1} \cdots x_d^{q_d} e^{-a_1 x_1^2 - \cdots - a_d x_d^2}$. Donc $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $e^{-\|x\|_2^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 6.2 : (i) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}^d$ : $x^q \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^d$ : $D^p \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Pour $m, k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$\|\varphi\|_{k,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{|p|\le m} \left(1 + \|x\|_2\right)^k |D^p \varphi(x)|\,.$$

On a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour tous $k, m \in \mathbb{N}$ : $\|\varphi\|_{k,m} < \infty$.

**Définition 6.3 (Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) :** Soit $(\varphi_n)_n$ une suite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On dit que $(\varphi_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si pour tous $k, m \in \mathbb{N}$ : $\|\varphi_n - \varphi\|_{k,m} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

**Théorème 6.4 :** *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace dense de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ il existe une suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi = 1$ sur $\overline{\mathcal{B}(0,1)}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$. On a

- $\forall n \in \mathbb{N}$ : $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\chi_n - 1 = 0$ sur $\overline{\mathcal{B}(0,n)}$
- $\sup\limits_n \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} |D\chi_n(x)| \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} |D^p \chi(x)|\,.$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Posons $\varphi_n = \chi_n \varphi$. Alors pour tout $n$ : $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Montrons que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ :

$$D^p(\varphi - \varphi_n) = \sum_{|q| \leq |p|} \binom{p}{q} D^{p-q}(1-\chi_n) D^q \varphi.$$

On a $1 - \chi_n = 0$ sur $\mathcal{B}(0,n)$. Donc

$$\begin{aligned}\|\varphi - \varphi_n\|_{k,n} &= \sup_{|p|\leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(1 + \|x\|_2\right)^k |D^p(\varphi - \varphi_n)(x)| \\ &\leq c \sup_{|p|\leq m} \sup_{\|x\|_n \geq n} \left(1 + \|x\|_2\right)^k |D^p\varphi(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

□

## 6.2. Distributions tempérées

Soit $\widetilde{T}\ :\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \langle \widetilde{T}, \varphi\rangle$.

**Définition 6.5 :** On dit que $\widetilde{T}$ *est continue* (pour la topologie associé à la semi norme $\|\cdot\|_{k,m}$) si pour toute suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

On note par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *l'ensemble des formes linéaires continues sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (au sens ci-dessus).

**Proposition 6.6 :** *Soit* $\widetilde{T}\ :\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ *une application linéaire. Alors* $\widetilde{T}$ *est continue si*

$$\exists c > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} \quad \textit{tels que} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ :\ |\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle| \leq c \|\varphi\|_{k,m}.$$

*Démonstration.* Si la condition est satisfaite, alors $\widetilde{T}$ est evidemment continue.

Supposons alors que la condition ne soit pas satisfaite. Donc pour tout $n$, il existe $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $|\langle \widetilde{T}, \varphi_n\rangle| > n \|\varphi\|_{n,n}$.

On pose $\psi_n = \dfrac{\varphi_n}{n \|\varphi\|_{n,n}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc on a pour tous $k, m \in \mathbb{N}$ :

$$\|\psi_n\|_{k,m} = \frac{1}{n} \frac{\|\varphi_n\|_{k,m}}{\|\varphi_n\|_{n,n}} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} n$$

pour $n$ assez grand. Donc $(\psi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. D'autre côté $|\langle \widetilde{T}, \psi_n\rangle| > 1$ et donc $\widetilde{T}$ n'est pas continue. □

<u>Remarque 6.7</u> : Soit $\widetilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T = \widetilde{T}\big|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

*Démonstration.* Soit $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\varphi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe $K$ tel que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^d$ : $D^p\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ uniformément. On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left(1 + \|x\|_2\right)^k |D^p\varphi_n(x)| = \sup_{x\in K} \left(1 + \|x\|_2\right)^k |D^p\varphi_n(x)| \leq c \sup_{x \in K} |D^p\varphi(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d'où $(\varphi_n)_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\langle T, \varphi_n\rangle = \langle \widetilde{T}, \varphi_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

**Définition 6.8 :** On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est *une distribution tempérée* si elle est la restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ d'un élément $\widetilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

**Corollaire 6.9 :** *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $T$ *est une distribution tempérée si et seulement s'ils existent* $c > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *tels que pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ : $|\langle T, \varphi\rangle| \le c \, \|\varphi\|_{k,m}$.

*Démonstration.* Si $T$ est une distribution tempérée, il existe $\widetilde{T} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $T = \widetilde{T}\big|_{\mathcal{D}(R^d)}$ et donc la propriété decoule de la proposition précédente (6.6).

Si la propriété est satisfaite et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$|\langle T, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi_{n'}\rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi_{n'}\rangle| \le c \, \|\varphi_n - \varphi_{n'}\|_{k,m}$$

et il s'ensuit que $(\langle T, \varphi_n\rangle)_n$ est une suite de Cauchy et donc converge dans $\mathbb{C}$. On note

$$\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle.$$

On vérifie que $\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle$ ne dépend pas de $(\varphi_n)$ et

$$|\langle T, \varphi_n\rangle| \le c \, \|\varphi_n\|_{k,m} \xrightarrow{n\to\infty} |\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle| \le c \, \|\varphi\|_{k,m}.$$

Alors $\widetilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et on a $\widetilde{T}\big|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = T$.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et on peut identifier $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ avec l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$ en identifiant $\widetilde{T}$ avec $\widetilde{T}\big|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$. □

Remarque 6.10 : (i) Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à support compact est une distribution tempérées.

(ii) On a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \implies \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\displaystyle\int \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|_2)^k} \,\mathrm{dx} < \infty$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(iv) Soit $0 \le r \le +\infty$. Alors $\mathrm{L}^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

*Démonstration.* (i) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $K$ un compact tel que $\operatorname{supp} T \subset K^\circ$. Ils existent $m \in \mathbb{N}^d$ $\exists c > 0$ tels que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le c \sup_{|p|\le m} \sup_{x\in K} |D^p\varphi(x)| \le c \, \|\varphi\|_{0,m}. \qquad \text{(cf. proposition 4.43)}$$

D'après le corollaire 6.9, $T$ est une distribution tempérée.

(ii) On a d'après le premier item $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$|\langle [f], \varphi\rangle| = \left|\int f(x)\varphi(x)\right| \le c \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big(1 + \|x\|_2\big)^k \, |\varphi(x)| \le c \, \|\varphi\|_{k,0}$$

où $c = \displaystyle\int \frac{|f(x)|}{\big(1+\|x\|_2\big)^k} \,\mathrm{dx} < \infty$.

(iv) Soit $f \in \mathrm{L}^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Pour $1 < r < \infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{\left(1+\|x\|^d\right)} \,\mathrm{dx} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^r \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+\|x\|)^{dr'}} \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{r'}}$$

où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. On a de plus $d < dr'$ et donc $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\|x\|)^{dr'}} \,\mathrm{dx} < \infty$. D'après le troisième item, on obtient $[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

□

**Proposition 6.11 :** *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors*

*(i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ : $x^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

*(ii) Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ : $D^\beta T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors ils existent $c > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ tels que pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ : $|\langle T, \psi\rangle| \leq c \,\|\psi\|_{k,m}$.

(i) Avec $x^\alpha\varphi : x \mapsto x^\alpha\varphi(x)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle x^\alpha T, \varphi\rangle| = |\langle T, x^\alpha\varphi\rangle| &\leq c\,\|x^\alpha\varphi\|_{k,m} \\ &\leq c \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big(1+\|x\|\,\big)^k \,|D^p(x^\alpha\varphi)(x)| \\ &\leq c' \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big(1+\|x\|\,\big)^{k+\alpha} D^p\varphi(x) \end{aligned}$$

car $\left|x_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot x_d^{r_d}\right| \leq (1+\|x\|)^{r_1+\cdots+r_d}$. Alors $x^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(ii)

$$\begin{aligned} \left|\langle D^\beta T, \varphi\rangle\right| &= \left|(-1)^{|\beta|}\langle T, D^\beta\varphi\rangle\right| \\ &\leq c\left\|D^\beta\varphi\right\|_{k,m} = \sup_{|p|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big(1+\|x\|\,\big)^k \left|D^{p+\beta}\varphi(x)\right| \\ &\leq c\,\|\varphi\|_{k,m+|\beta|}\,, \end{aligned}$$

d'où $D^\beta T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 6.12 : Afin de montrer la dernière proposition, on peut aussi remarquer que si $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $x^\alpha\varphi_n \to 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $D^\beta\varphi_n \to 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

## 6.3. Transformation de Fourier

### 6.3.1. Rappel : Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de $f$ est définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\widehat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot w}\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(x_1w_1+\cdots+x_dw_d)}\,\mathrm{dx}_1\cdots\mathrm{dx}_d\,.$$

On a les propriétés suivantes :

(1) Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

(i) $\widehat{f}$ est continue et $|\widehat{f}| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}$.

(ii) $\widehat{f}(w) \xrightarrow{\|w\|\to\infty} 0$ (Propriété de Riemann-Lebesgue)

(iii) Théorème d'inversion : Si $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors on a presque partout

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(w) e^{ix\cdot w} \, \mathrm{dw}\,.$$

(iv) La transformée de Fourier est unique : Si $\widehat{f} = 0$, alors $f = 0$.

(2) Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(x) \, \mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) \, \mathrm{dx}\,. \qquad \text{(Théorème de transfert)}$$

(3) Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Si $\forall p \in \mathbb{N}^d$, $|p| \leq m$ : $x^p f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$ et $D^p \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left((-ix)^p f\right)$.

(4) Si $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$ avec $D^p f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^d$, $|p| \leq m$, alors $\widehat{D^p f} = (iw)^p \widehat{f}$.

**Produit de convolution :** Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \, \mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \, \mathrm{dy}\,.$$

$(f * g)(x)$ existe pour presque tout $x$ et on a $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ et

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}\,.$$

### 6.3.2. Rappel : Transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$

Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On pose $f_k = \mathbf{1}_{[-k,k]^d} f$. Alors

$$\widehat{f_k}(w) = \int_{[-k,k]^d} f(x) e^{-ix\cdot w} \, \mathrm{dx}\,.$$

$(\widehat{f_k})_k$ converge pour a norme $\|\cdot\|_2$ vers une fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ qu'on notera $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$. De plus, on pose

$$\widetilde{f_k}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-k,k]^d} \widehat{f}(x) e^{ix\cdot w} \, \mathrm{dw}\,.$$

$(\widetilde{f_k})_k$ converge dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vers une fonction qu'on notera $\mathcal{F}^{-1}(f)$.

**Théorème 6.13 (Formule de Plancherel) :** *La transformation de Fourier sur* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *est une transformation unitaire à une constante près. On a pour toute* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ :

$$\|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^d \, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$$

*et*

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(x)|^2 \,\mathrm{dx}\,.$$

*L'application réciproque de* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}^{-1}$ *et on a* $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(f)$.

### 6.3.3. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

**Théorème 6.14 :** *La transformation de Fourier est un isomorphisme de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *dont l'application réciproque est* $\mathcal{F}^{-1}$.

*Démonstration.* Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et soit $p,\, q \in \mathbb{N}^d$. On a

$$(iw)^q \frac{\partial^{|p|}\widehat{\varphi}}{\partial w^p} = (iw)^q \widehat{(-ix)^p\varphi} = \frac{\partial^{|q|}}{\partial x^q}\big((-ix)^p\varphi\big).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
\sup_w \left| w^q \frac{\partial^{|p|}}{\partial w^p}\widehat{\varphi}(w)\right| &\le \sup_w \left|\frac{\partial^{|q|}}{\partial x^q}\big((-ix)^p\varphi\big)(w)\right| \\
&\le \left\|\frac{\partial^{|q|}}{\partial x^q}\big((-ix)^p\varphi\big)\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\le \int \left|\frac{\partial^{|q|}}{\partial x^q}\big((-ix)^p\varphi\big)(x)\right| \mathrm{dx} \\
&\le \left(\int \frac{1}{\big(1+\|x\|\,\big)^{d+1}}\,\mathrm{dx}\right) \sup_x \big(1+\|x\|\,\big)^{d+1}\left|\frac{\partial^{|q|}}{\partial x^q}\varphi(x)\right| \\
&\le \mathrm{cste}\cdot \sup_{|p|\le|q|} \big(1+\|x\|\,\big)^{d+1+|p|}\,|D^q\varphi(x)| \\
&\le \mathrm{cste}\cdot \|\varphi\|_{d+1+|p|,|q|}
\end{aligned}$$

Donc $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, si $(\varphi_n) \to 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $(\widehat{\varphi}_n) \to 0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}$ est continue.

De même, on obtient pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ : $\mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}^{-1}$ est continue.

Puisque $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ est intégrable, on a $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}$ presque partout. Comme $\varphi$ est $\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}$ sont continues, on a $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}$. Donc, il suit que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

### 6.3.4. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

La formule de transfert

$$\int \widehat{\varphi}(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} = \int \varphi(x)\widehat{\psi}(x)\,\mathrm{dx} \qquad\qquad \varphi,\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$$

suggère la définition suivante.

**Définition 6.15 :** Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. *La transformée de Fourier* $\mathcal{F}(T)$ est définie pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ par $\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$.

On définit de même $\mathcal{F}^{-1}(T)$ par $\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi\rangle := \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle$.

Remarque 6.16 : (i) Cette définition a bien un sens car pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a que $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.[24]

(ii) Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ou $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle = \langle [f], \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int f(x)\widehat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} = \int \widehat{f}(x)\varphi(x) = \langle [\mathcal{F}(f)], \varphi\rangle,$$

d'où $\mathcal{F}[f] = [\mathcal{F}(f)]$.

La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ prolonge la transformation de Fourier dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

**Théorème 6.17 :** *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même dont l'application réciproque est $\mathcal{F}^{-1}$.*

*Démonstration.* Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a déjà montré dans le théorème 6.14 que $\mathcal{F}(\varphi_n) \to \mathcal{F}(\varphi)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi_n\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi_n)\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle,$$

d'où $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

On a de même $\mathcal{F}^{-1}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il s'ensuit

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

et donc $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(T) = T$ et de même $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(T) = T$.

Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire $\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\langle \mathcal{F}(T_n), \varphi\rangle \to \langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle$. □

Exemple :

- $\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \mathcal{F}(\varphi)(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{dx} = \langle [1], \varphi\rangle$
- De même, on a $[\mathcal{F}(\delta_a)] = [f_a]$ où $f_a(w) = e^{-ia\cdot w}$.

[24] cf. le théorème 6.14

- Avec $p \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(D^p\delta_0), \varphi\rangle = \langle D^p(\delta_0), \mathcal{F}(\varphi)\rangle &= (-1)^{|p|}\langle \delta_0, D^p\mathcal{F}(\varphi)\rangle \\ &= (-1)^{|p|}\langle \delta_0, \mathcal{F}\big((-ix)^p\varphi\big)\rangle \\ &= \int (ix)^p\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \langle \big[(ix)^p\big], \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Exercice : $\mathcal{F}^{-1}(\delta_0) = \,?$

### 6.3.5. Transformation de Fourier des distributions à support compact

**Définition 6.18 :** Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. On dira que $f$ est *à croissance lente* s'ils existent $c > 0$ $\exists k \in \mathbb{N}$ tels que $|f(x)| \leq c\big(1 + \|x\|_2\big)^k$.

**Théorème 6.19 :** *Soit $T$ une distribution à support compact, c'est-à-dire $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On a $\mathcal{F}(T) = [f_T]$ où $f_T(w) = \langle T(x), e^{-ix\cdot w}\rangle$. La fonction $f_T$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées.*

*Démonstration.* D'abord, remarquons que $f_T$ est bien définie car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et la fonction $x \mapsto e^{-ix\cdot w}$ est dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle &= \langle T(w), \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)e^{-ix\cdot w}\,\mathrm{dx}\rangle \\ &= \langle T(w), \langle \underbrace{[\varphi](x)}_{\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)}, e^{-ix\cdot w}\rangle\rangle = \langle T * [\varphi], e^{-ix\cdot w}\rangle \\ &= \langle [\varphi](x), \underbrace{\langle T(w), e^{-ix\cdot w}\rangle}_{f_T(x)}\rangle \\ &= \int \varphi(x)f_T(x)\,\mathrm{dx} = \langle [f_T], \varphi\rangle \\ \Longrightarrow\ \mathcal{F}(T) = [f_T]&\end{aligned}$$

et $f_T(x) = \langle T(w), e^{-ix\cdot w}\rangle = \langle T(w), \gamma(w)e^{-ix\cdot w}\rangle$ où $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\gamma = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$.

Soit maintenant $r > 0$ et $\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\delta = 1$ sur $\mathcal{B}(0, r)$. On a

$$\delta(x)f_T(x) = \langle T(w), \delta(x)\gamma(w)e^{-ix\cdot w}\rangle.$$

La fonction $(x, w) \mapsto \delta(x)\gamma(w)e^{-ix\cdot w} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. D'après la proposition 5.2, on a

$$\delta f_T \in \mathcal{C}^\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}(\delta f_T) = \langle T(w), \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}(\delta(x)\gamma(x)e^{-ix\cdot w})\rangle.$$

Comme $\delta = 1$ sur $\mathcal{B}(0, r)$, on obtient $\delta f_T = f_T$ sur $\mathcal{B}(0, r)$. Donc $f_T \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}(0, r))$. Comme $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, ils existe un compact $K$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \psi\rangle| \leq c \sup_{|p|\leq m}\sup_{x\in K} |D^p\psi(x)|\,.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}|f_T(x)| = \big|\langle T(w), e^{-ix\cdot w}\rangle\big| &\leq c \sup_{|p|\leq m}\sup_{x\in K}\left|\frac{\partial^{|p|}}{\partial w^p}\left(e^{-ix\cdot w}\right)\right| \\ &\leq c \sup_{|p|\leq m}\sup_{x\in K}\big|(-ix)^p e^{-ix\cdot}\big| \leq c'\big(1+\|x\|_2\big)^m\end{aligned}$$

On montre de même que les dérivées de $f_T$ sont à croissance lente. □

**Proposition 6.20 :** *Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ deux distributions à support compact. Alors $\mathcal{F}(T_1 * T_2) = \mathcal{F}(T_1)\cdot\mathcal{F}(T_2)$ au sens des fonctions.*

*Démonstration.* $T_1 * T_2$ est une distribution à support compact. D'après le théorème précédent (6.19), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T_1 * T_2) = [f] \qquad\qquad \text{où } f(w) &= \langle (T_1 * T_2)(x), e^{-ix\cdot w}\rangle \\ &= \langle T_1(u)\otimes T_2(v), \gamma_1(u)\gamma_2(v)e^{-i(u+v)\cdot w}\rangle \\ &= \langle T_1(u), \gamma_1(u)e^{-iu\cdot w}\rangle\langle T_2(v), \gamma_2(v)e^{-iv\cdot w}\rangle \\ &= f_{T_1}(w) f_{T_2}(w)\end{aligned}$$

avec $\gamma_1$, $\gamma_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ où $\gamma_1 = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T_1$ et $\gamma_2 = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T_2$.

Alors, on a d'après le théorème précédent (6.19) que $\mathcal{F}(T_1) = [f_{T_1}]$ et $\mathcal{F}(T_2) = [f_{T_2}]$ et donc $[f_{T_1 * T_2}] = [f_{T_1} f_{T_2}]$. □

**Proposition 6.21 :** *Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et on a $\mathcal{F}(T * S) = f_T\mathcal{F}(S)$ où $f_T(w) = \langle T(x), e^{-ix\cdot w}\rangle$.*

*Démonstration.* Car $f_T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, $f_T\mathcal{F}(S)$ est bien définie comme produit d'une distribution et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On laisse $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ comme exercice.

$$\langle \mathcal{F}(T*S), \varphi\rangle = \langle T * S, \widehat{\varphi}\rangle = \langle S(y), \langle T(x), \widehat{\varphi}(x+y)\rangle\rangle$$

On a que

$$\begin{aligned}\langle T(x), \widehat{\varphi}(x+y)\rangle &= \langle \delta_y * T, \widehat{\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}(\delta_y * T), \varphi\rangle \\ &= \langle [w \mapsto e^{-iy\cdot w} f_T(w)], \varphi\rangle \qquad\qquad \text{(d'après la proposition 6.20)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\cdot w} f_T(w)\varphi(w)\,\mathrm{dw} \\ &= \widehat{f_T\varphi}(y)\end{aligned}$$

et donc il s'ensuit

$$\mathcal{F}(T*S) = \langle S, \widehat{f_T\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}(S), f_T\varphi\rangle = \langle f_T\mathcal{F}(S), \varphi\rangle.$$

D'où le résultat. □

## 6.4. Solutions fondamentales tempérées d'un opérateur différentiel

Soit $P(D) = \sum_{|p|\leq m} a_p D^p$ un opérateur differentiel à coefficients constants.

Supposons que $P(D)$ admette une solution fondamentale $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donc, $P(D)E = \delta_0$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(P(D)E), \varphi \rangle &= \langle P(D)E, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\
&= \langle E, \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} a_p \mathcal{F}\big((-ix)^p \varphi\big) \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}(E), \sum_{|p|\leq m} a_p (-ix)^p \varphi \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}(E), P(ix)\varphi \rangle = \langle P(ix)\mathcal{F}(E), \varphi \rangle \\
\Longrightarrow \ \langle \mathcal{F}(\underbrace{P(D)E}_{=\delta_0}) \rangle &= P(ix)\mathcal{F}(E)
\end{aligned}$$

et donc $P(ix)\mathcal{F}(E) = 1$.

# 7. Espace de Sobolev

## Introduction

**Définition 7.1 :** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $m \in \mathbb{N}$. *L'espace de Sobolev* $\mathcal{H}^m(\Omega)$ est défini par

$$\mathcal{H}^m(\Omega) := \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \forall p \in \mathbb{N}^d,\, |p| \leq m \ : \ D^p f \in \mathrm{L}^2(\Omega) \right\}.$$

Remarque 7.2 : $D^p f$ est la dérivation au sens de distribution lorsqu'on identifie $f$ et $[f]$, c'est-à-dire $D^p f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ : $D^p f = [g]$ où $g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Pour $f, g \in \mathcal{H}^m(\Omega)$, on pose

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^m(\Omega)} := \sum_{|p| \leq m} \langle D^p f, D^p g \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ est le produit scalaire dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, c'est-à-dire $\langle f, g \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$ pour $f, g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^m(\Omega)$ et on définit par

$$\|f\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \left( \sum_{|p| \leq m} \|D^p f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

une norme sur $\mathcal{H}^m(\Omega)$.

**Proposition 7.3 :** *$\mathcal{H}^m(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$ est complet et donc un espace de Hilbert.*

*Démonstration.* Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^m(\Omega)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^d$, $|p| \leq m$, on a

$$\|D^p f_n - D^p f_m\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq \|f_n \cdot f_m\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}\,.$$

Donc $(D^p f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Or, $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est complet, donc il existe $g_p \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tel que $\|D^p f_n - g_p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Soit $f = g_0$. On a que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et il suit que $[f_n] \to [f]$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, on a pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$|\langle [f_n - f], \varphi \rangle| = \left| \int \big(f_n(x) - f(x)\big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Donc $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et il s'ensuit que $D^p f_n \to D^p f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

D'autre part, on a que $D^p f_n \to g_p$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et alors $D^p f_n \to g_p$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, d'où $D^p f = g_p$. Alors $f \in \mathcal{H}^m(\Omega)$. Finalement

$$\|f_n - f\|^2_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \sum_{|p| \leq m} \|D^p f_n - D^p f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \sum_{|p| \leq m} \|D^p f_n - g_p\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

D'où $f_n \to f$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)}$. $\square$

Remarque 7.4 : Soit $r \geq 1$. On définit

$$\mathcal{W}^{m,r}(\Omega) := \{f \in \mathrm{L}^r(\Omega), \quad \forall p \in \mathbb{N}^d, |p| \leq m : \quad D^p f \in \mathrm{L}^r(\Omega)\}.$$

$\mathcal{W}^{m,r}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{m,r}} := \left( \sum_{|p| \leq m} \|D^p f\|^r_{\mathrm{L}^r(\Omega)} \right)^{\frac{1}{r}}$$

est complet et donc un espace de Banach. De plus, $\mathcal{W}^{m,2}(\Omega) = \mathcal{H}^m(\Omega)$.

## Cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$

**Proposition 7.5 :** *Soit $m \in \mathbb{N}$. On a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d) &= \left\{ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \ w^p \mathcal{F}(T) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\} \\
&= \left\{ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \ \left(1 + \|w\|_2^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}(T) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \right\}.
\end{aligned}$$

*De plus, on a*

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|w\|_2^2\right)^m |\mathcal{F}(f)(w)|^2 \,\mathrm{dw}\,.$$

*Démonstration.* Soit $f \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d)$.

On a $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et donc $D^p f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}(D^p f) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $(iw)^p \mathcal{F}(f) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Soient $f, g \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d)} &= \sum_{|p| \leq m} \langle D^p f, D^p g \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{|p| \leq m} \langle \mathcal{F}(D^p f), \mathcal{F}(D^p g) \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{|p| \leq m} \langle (iw)^p \mathcal{F}(f), (iw)^p \mathcal{F}(g) \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{|p| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} w^{2p} \mathcal{F}(f)(w) \overline{\mathcal{F}(g)(w)} \,\mathrm{dw} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{|p| \leq m} w^{2p} \right) \mathcal{F}(f)(w) \overline{\mathcal{F}(g)(w)} \,\mathrm{dw}
\end{aligned}$$

Or, on a par récurrence que $\displaystyle\sum_{|p|\leq m} w^{2p} = \big(1+\|w\|_2^2\big)^m$.

$$\begin{aligned}
\implies \langle f,g\rangle_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\big(1+\|w\|_2^2\big)^m \mathcal{F}(f)(w)\overline{\mathcal{F}(g)(w)}\,\mathrm{dw}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\big(1+\|w\|_2^2\big)^m\,|\mathcal{F}(f)(w)|^2\,\mathrm{dw}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\left\|\big(1+\|w\|_2^2\big)^{\frac{m}{2}}\mathcal{F}(f)(w)\right\|^2_{\mathrm{L}^2\mathbb{R}^d}
\end{aligned}$$

Soit maintenant $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ avec $w^p\mathcal{F}(T)\in\mathrm{L}^2(\Omega)$ pour tout $p\in\mathbb{N}^d$, $|p|\leq m$. Donc

$$(iw)^p\mathcal{F}(T)=\mathcal{F}(D^pT) \implies D^p=\mathcal{F}^{-1}\big(\underbrace{\mathcal{F}(D^p(T))}_{\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}\big)\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$$

et alors $T\in\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d)$. □

**Définition 7.6 :** Soit $s\in\mathbb{R}^d$. On définit $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) := \Big\{T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\ \big(1+\|w\|_2^2\big)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(T)\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)\Big\}.$$

Pour $T,S\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$. On pose

$$\langle T,S\rangle_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\big(1+\|w\|_2^2\big)^s\mathcal{F}(T)(w)\overline{\mathcal{F}(S)(w)}\,\mathrm{dw}$$

et

$$\|T\|^2_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\big(1+\|w\|_2^2\big)^s\right|\left|\mathcal{F}(T)(w)\overline{\mathcal{F}(S)(w)}\right|^2\mathrm{dw}\,.$$

**Proposition 7.7 :** *$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert.*

*Démonstration.* Utiliser le fait que $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ est complet. □

Remarque 7.8 : Lorsque $s=m\in\mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^d)$ défini au début du chapitre (définition 7.1) coincide avec $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ obtenu ci-dessus (définition 7.6).

**Proposition 7.9 :** *Soient $s,t\in\mathbb{R}$.*

*(i) Si $s<t$, alors $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $\|T\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)}\leq\|T\|_{\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $T\in\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^d)$.*

*(ii) $\forall s>0$ : $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)\subset\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$*

*(iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$.*

*(iv) L'opérateur de dérivation $D^p$ est continu de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{H}^{s-|p|}(\mathbb{R}^d)$.*

(v) *Pour* $T \in \mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$, *on définit*

$$\begin{aligned} L_T \,:\, & \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C} \\ & S \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(S)(w)\overline{\mathcal{F}(T)(w)}\,\mathrm{dw}\,. \end{aligned}$$

*Alors, l'application* $L \,:\, T \mapsto L_T$ *est un isomorphisme anti-linéaire isométrique de* $\mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$ *dans* $(\mathcal{H}^s)'$.

*Démonstration.* (i) Immédiat.

(ii) Découle de (i) et du fait que $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^d) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

(iii) On sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $T \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

On pose $g = \left(1 + \|w\|_2^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(T) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Par densité, il existe $(g_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|g_n - g\|_{\mathrm{L}^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. De plus, on a $\left(1 + \|w\|_2^2\right)^{-\frac{s}{2}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On pose

$$f_n = \overline{\mathcal{F}}\left(\left(1 + \|w\|_2^2\right)^{-\frac{s}{2}} g_n\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

ce qui est bien définie car $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Donc, on obtient

$$\begin{aligned} \|f_n - T\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|w\|_2^2\right)^s |\mathcal{F}(f_n)(w) - \mathcal{F}(f)(w)|^2\,\mathrm{dw} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|w\|_2^2\right)^s \left|\left(1 + \|w\|_2^2\right)^{-\frac{s}{2}} g_n(w) - \left(1 + \|w\|_2^2\right)^{-\frac{s}{2}} g(w)\right|^2 \mathrm{dw} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \|g_n - g\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

pour tout $n$, $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

(iv) Soit $p \in \mathbb{N}^d$ et $T \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\left(1 + \|w\|_2^2\right)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}(T) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}(D^pT) = (iw)^p\mathcal{F}(T).$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \|w\|_2^2\right)^{\frac{s-|p|}{2}} \mathcal{F}(D^p(T)(w)\right| &= \left| \left(1 + \|w\|_2^2\right)^{\frac{s-|p|}{2}} (iw)^p\mathcal{F}(T)(w)\right| \\ &\leq \left| \left(1 + \|w\|_2^2\right)^{\frac{s-|p|}{2}} \mathcal{F}(T)(w)\right| \end{aligned}$$

d'où $\|D^p(T)\|_{\mathcal{H}^{s-|p|}(\mathbb{R}^d)} \leq \|T\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)}$.

(v) D'après le théorème de représentation de Riesz (4.15), l'application

$$\begin{aligned} \Lambda \,:\, & \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \to (\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))' \\ & T \mapsto \Lambda_T \end{aligned} \qquad \text{où } \begin{aligned} \Lambda_T \,:\, & \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C} \\ & S \mapsto \langle S, T\rangle_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

est un isomorphisme anti-linéaire de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ dans $(\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))'$.

Or, l'application

$$\Delta\ :\ \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{avec} \qquad T \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+\|w\|_2^2\right)^s \mathcal{F}(T)\right)$$

est un isomorphisme isométrique. (Exercice)

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+\|w\|_2^2\right)^s \mathcal{F}(T)\right) = \widetilde{T} &\iff \left(1+\|w\|_2^2\right)^s \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(\widetilde{T}) \\
&\iff \mathcal{F}(T) = \left(1+\|w\|_2^2\right)^{-s} \mathcal{F}(\widetilde{T}) \\
&\iff T = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+\|w\|_2^2\right)^{-s} \mathcal{F}(\widetilde{T})\right)
\end{aligned}$$

Finalement, pour toute $T \in \mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\Delta^{-1}(T)}(S) &= \langle S, \Delta^{-1}(T)\rangle_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+\|w\|_2^2\right)^s \mathcal{F}(S)(w)\overline{\mathcal{F}(\Delta^{-1}(T))(w)}\,\mathrm{dw} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+\|w\|_2^2\right)^s \mathcal{F}(S)(w)\left(1+\|w\|_2^2\right)^{-s}\overline{\mathcal{F}(T)(w)}\,\mathrm{dw} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(S)(w)\overline{\mathcal{F}(T)(w)}\,\mathrm{dw} \\
&= L_T(S)
\end{aligned}$$

□

### Théorème d'injection de Sobolev

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^d) = \left\{f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d),\quad \forall p \in \mathbb{N}^d,\ |p| \leq k\ :\ \ D^p f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)\right\}$$

où $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) = \left\{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d),\ \lim\limits_{\|x\|\to\infty} g(x) = 0\right\}$.

**Théorème 7.10 :** *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $s > \frac{d}{2}+k$. $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^d)$. On a précisément : Pour toute $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$, il existe $f \in \mathcal{B}_0^k(\mathbb{R}^d)$ telle que $f = f_0$ presque partout.*

*De plus, il existe une constante $C(d,k,s)$ telle que*

$$\sup_{|p|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^p f_0(x)| \leq C(d,k,s)\,\|f\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)}\,.$$

*Démonstration.* Soit $p \in \mathbb{N}^d$ et $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\mathcal{F}(D^p f(w)) = i^{|p|}w^{|p|}\mathcal{F}(f)(w) = \underbrace{\frac{i^{|p|}w^{|p|}}{\left(1+\|w\|_2^2\,\right)^{\frac{s}{2}}}}_{\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}\underbrace{\left(1+\|w\|_2^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f)(w)}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$$

et $\dfrac{i^{|p|}w^{|p|}}{\big(1+\|w\|_2^2\big)^{\frac{s}{2}}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ parce que

$$\left|\frac{i^{|p|}w^{|p|}}{\big(1+\|w\|_2^2\big)^{\frac{s}{2}}}\right|^2 \leq \frac{\big(1+\|w\|_2^2\big)^p}{\big(1+\|w\|_2^2\big)^s} \leq \frac{1}{\big(1+\|w\|_2^2\big)^{s-k}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$$

car $|p| \leq k$ et $d < 2(s-k)$ par hypothèse. On obtient $\mathcal{F}(D^p f(w)) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Maintenant, on a aussi

$$D^p f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(D^p f))(x) = \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{iw\cdot x}\mathcal{F}(D^p f)(w)\,\mathrm{dw}}_{\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)}$$

presque partout par Riemann-Lebesgue.[25]

Soit $f_0 = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$, d'où $f = f_0$ presque partout. Donc

$$f_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot w}\mathcal{F}(f)(w)\,\mathrm{dw}\,.$$

Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^d$, $|p| \leq k$, on a $\displaystyle\int |w^p\mathcal{F}(f)(w)|\,\mathrm{dw} < +\infty$, il s'ensuit $f_0 \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.
D'où

$$\begin{aligned}
|D^p f_0(x)| &= \frac{1}{2\pi^d}\int_{\mathbb{R}^d}(iw)^p e^{ix\cdot w}\mathcal{F}(f)(w)\,\mathrm{dw} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^d}\left\|\frac{w^p}{\big(1+\|w\|_2^2\big)^{\frac{s}{2}}}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \left\|\big(1+\|w\|_2^2\big)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f)\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq \underbrace{\left\|\frac{1}{\big(1+\|w\|_2^2\big)^{\frac{s-k}{2}}}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}}_{=C(d,k,s)} \|f\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)} \qquad \square
\end{aligned}$$

[25] cf. paragraphe 6.3.1

# A. Résumé

## A.1. Chapitre 1

### I. Opérateurs inversible

Soit $X$ un espace de Banach sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. On note par $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ l'ensemble des éléments inversible de $\mathcal{L}(X)$.

**Lemme :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Si* $\|T\| < 1$, *alors* $I - T$ *est inversible et* $(I-T)^{-1} = \sum_{k \geq 0} T^k$.

**Proposition :** *(1) Soit* $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$. *Alors* $\mathcal{B}(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|}) \subset \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ *où* $\mathcal{B}(T, \frac{1}{\|T^{-1}\|})$ *est la boule dans* $\mathcal{L}(X)$ *de centre* $T$ *et de rayon* $\frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

*En particulier,* $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ *est un ouvert.*

*(2) L'application* $T \to T^{-1}$ *est continue sur* $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$.

### II. Spectre et Résolvante

**Définition :** Soit $T \in \mathcal{L}(X)$.

(1) L'ensemble $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda I - T \text{ est inversible}\}$ est appelé ensemble résolvant de $T$.

(2) L'ensemble $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ est appelé le spectre de $T$.

(3) On dit $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $T$ s'il existe $x \in X$, $x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$.

Remarque : On a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Si $X$ est de dimension finie, alors $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

**Proposition :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Alors* $\sigma(T)$ *est compact et* $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} :\ |\lambda| \leq \|T\|\}$.

**Définition :** Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. L'application $\lambda \to R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1}$, definie sur $\rho(T)$, est appelé la résolvante de $T$.

**Proposition :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Pour* $\lambda, \mu \in \rho(T)$, *on a* $R_\lambda(T)R_\mu(T) = R_\mu(T)R_\lambda(T)$ *et on a la formule de la résolvante :*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\mu(T)R_\lambda(T).$$

**Proposition :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$. *L'application* $\lambda \to R_\lambda(T)$ *est analytique sur* $\rho(T)$.

**Théorème :** *Lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : $\sigma(T)$ *est non vide.*

### III. Rayon spectral

**Définition :** Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T)$ est non vide, on pose $r(T) = \sup\{|\lambda|\,,\ \lambda \in \sigma(T)\}$. On appelle $r(T)$ le rayon spectral de $T$.

Remarque : Comme $\sigma(T)$ est compact, on peut remplacer le sup dans la définition de $r(T)$ par max. Notons $\sigma(T) \neq \emptyset$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Théorème :** *On a, que la limite* $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ *existe et elle est égale à* $\inf\limits_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

*Lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *on a* $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

### IV. Valeurs propres approchés

**Définition :** Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que $\lambda$ est une valeur propre approchée de $T$ s'il existe une suite $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| = 1$ telle que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. On note par $\sigma_{ap}(T)$ l'ensemble des valeurs propres approchées de $T$.

Remarque : On a que $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. De plus

$$\lambda \notin \sigma(T) \iff \inf_{\|x\|=1} \|Tx - \lambda x\| > 0 \iff \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ : \ \|Tx - \lambda x\| \geq \delta \|x\|\,.$$

**Proposition :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Alors* $\sigma_{ap}(T)$ *est un fermé et* $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.

**Théorème :** *On a* $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$, *où* $\partial\sigma(T)$ *est le bord de* $\sigma(T)$.

### V. L'adjoint d'un opérateur ; Opérateurs autoadjoints

Soit $H$ un espace de Hibert et $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit $T^*$ l'opérateur adjoint de $T$ ce qui est défini par la formule $\forall x, y \in H \ : \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$.

**Proposition :** *Soit* $\mathcal{L}(H)$. *On a* $\ker T^* = \mathrm{Im}(T)^\perp$ *et* $\overline{\mathrm{Im}\, T} = (\ker T^*)^\perp$. *De plus $T$ est inversible si et seulement si* $T^*$ *l'est aussi.*

**Corollaire :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$. *Alors* $\sigma(T) = \{\overline{\lambda},\ \lambda \in \sigma(T)\}$ *et* $R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$.

**Lemme :** *Soit $X$ un espace de Banach et* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Les assertions sont équivalentes :*

*(1) Il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x \in X \ : \ \|Tx\| \geq \delta \|x\|$.

*(2)* $\ker(T) = \{0\}$ *et* $\mathrm{Im}\, T$ *est fermé.*

**Théorème :** *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *autoadjoint, c'est-à-dire* $T = T^*$. *Alors* $\sigma(T) \subset [m, M]$, *où*

$$m = \inf\{\langle Tx, x\rangle,\ x \in H,\ \|x\| = 1\} \qquad \text{et} \qquad M = \sup\{\langle Tx, x\rangle,\ x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$

# B. Exercices

## B.1. Feuille nº 1

**Exercice B.1 :** *(1) Soit $T$ un opérateur borné agissant sur un espace de Banach $X$.*

*Démontrer que pour tout $|\lambda| > \|T\|$, on a*

$$\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

*(2) Soit $S$ un autre opérateur borné sur $X$. On suppose que $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$. Montrer que*

$$(\lambda - T)^{-1} - (\lambda - S)^{-1} = (\lambda - T)^{-1}(T - S)(\lambda - S)^{-1}.$$

**Exercice B.2 :** *Soit $X := \ell^2\mathbb{N}$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $f \in X$. On définit l'opérateur de shift à gauche par*

$$(\tau_g f)(k) := f(k+1), \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

*et l'opérateur de shift à droite par*

$$(\tau_d f)(k) := f(k-1), \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \qquad (\tau_d f)(0) = 0.$$

*(1) Montrer que $\|\tau_g\| = \|\tau_d\| = 1$.*

*(2) Déduire que $\lambda \in \rho(\tau_g) \cap \rho(\tau_d)$, si $|\lambda| > 1$.*

*(3) Trouver les valeurs propres de $\tau_g$ et de $\tau_d$.*

*(4) Montrer que $\sigma(\tau_g) = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$ et que $\sigma(\tau_d) = \{0\}$.*

*(5) Mêmes questions pour $X = \ell^p(\mathbb{N})$, avec $p \in [1, \infty]$.*

**Exercice B.3 :** *Soit $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infini. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et pour tout $g \in X$, on définit l'opérateur de multiplication par $f$ : $(T_f g)(x) := f(x)g(x)$.*

*(1) Montrer que $T_f$ est un opérateur borné et calculer sa norme.*

*(2) Déduire que si $|\lambda| > \|f\|_\infty$, alors $\lambda \in \rho(T_f)$.*

*(3) Montrer que $\lambda$ est une valeur propre de $T_f$ si et seulement si $f^{-1}(\{\lambda\})$ est d'intérieur non vide.*

*(4) Montrer que $\lambda$ dans le spectre approché de $T_f$ si et seulement si $f^{-1}(\{\lambda\})$ est non vide.*

**Exercice B.4 :** *Soient $E$ et $F$ deux espace métriques et $(f_n)$ une suite de fonctions continues uniformément convergentes vers $f$. Montrer que $\{f_n \; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.*