Mathematik: Schweiz – Berlin Geschichte und Gegenwart

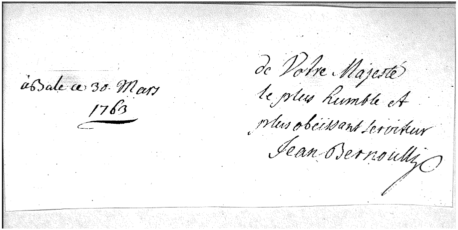
Jürg Kramer

Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin

3. November 2008

Mathematik: Schweiz – Berlin

Geschichte


à Bâle ce 30. Mars 1763

de Votre Majesté
le plus humble et
plus obéissant serviteur
Jean Bernoulli

Ende eines Briefes von Johann Bernoulli an Friedrich den Großen

Geschichte

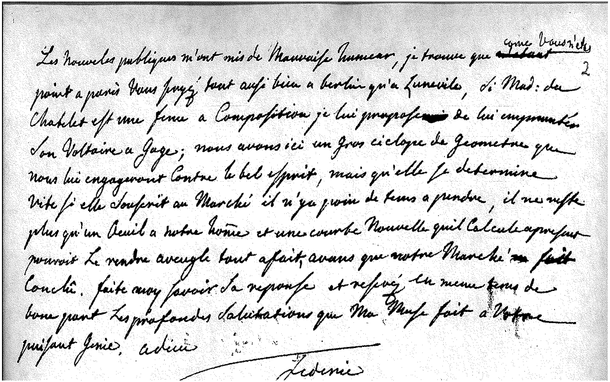
- 18. Jahrhundert:
  Leonhard Euler (1707 – 1783)
  Jakob Steiner (1796 – 1863)

- 19. Jahrhundert:
  Ferdinand G. Frobenius (1849 – 1917)
  Adolf Hurwitz (1859 – 1919)
  Heinrich Weber (1842 – 1913)

- 20. Jahrhundert:
  Heinz Hopf (1894 – 1971)
  Issai Schur (1875 – 1941)

Geschichte

Friedrich der Große


Les Nouvelles publiques m'ont mis de Mauvaise humeur, je trouve que comme Vous n'etes point a paris Vous fussiez tout aussi bien a berlin qu'a Luneville, si Mad: du Chatelet est une feme a Composition je lui proposerais de lui emprunter son Voltaire a Gage; nous avons ici un gros ciclope de Geometre que nous lui engagerons Contre le bel esprit, mais qu'elle se determine Vite si elle souscrit au Marché il n'y a point de tems a perdre, il ne reste plus qu'un Oeuil a notre home et une courbe Nouvelle quil Calcule a presant pourrait le rendre aveugle tout afait, avant que notre Marché fut Conclu. faite moy savoir sa reponse et recevez en meme tems de bone part Les profondes salutations que Ma Muse fait a Votre puissant Genie. adieu

Federic

Ende eines Briefes von Friedrich dem Großen an Voltaire

Geschichte

Leonhard Euler

- 1707 – 1727 Basel
  (Studium bei Johann Bernoulli)
- 1727 – 1741 St. Petersburg
  (St. Petersburger Akademie)
- 1741 – 1766 Berlin
  (Königl.-Preuß. Akad. d. Wiss.)
- 1766 – 1783 St. Petersburg
  (St. Petersburger Akademie)

Eine Kostprobe von Eulers Mathematik

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \ldots = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$$

?

?

?

Euler

… ein Mann, mit dem man rechnen kann?

… ein Mann, mit dem man rechnen kann?

Or maintenant me voyant dans l'etat de faire valoir mon peu de savoir auprès de la Nouvelle Société Literaire, je prends la liberté de supplier Votre Majesté de m'accorder gracieusement 300 Ecus pour mon voyage, qui m'a couté près de 500 Ecus, mais ayant joui de ma pension ici dès mon depart de Petersbourg, j'en dois rabattre 200, que j'ai deja reçues pour le tems, pendant lequel j'ai été en voyage. La necessité, où je me trouve de payer ma maison, m'oblige de faire cette très humble demande à Votre Majesté, et pour meriter cette Grace je tacherai de tout mon pouvoir de rendre à la Nouvelle Societé tous les services, dont je suis capable.

Auszug eines Briefes von L. Euler an Friedrich den Großen

Euler

Zurück zu Eulers Mathematik

Summen der Kehrwerte von Potenzen natürlicher Zahlen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = ?$$

Zurück zu Eulers Mathematik

Summen der Kehrwerte von Potenzen natürlicher Zahlen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = ?$$

Zurück zu Eulers Mathematik

Summen der Kehrwerte von Potenzen natürlicher Zahlen

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=?$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=?$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots=?$$

Zurück zu Eulers Mathematik

Summen der Kehrwerte von Potenzen natürlicher Zahlen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = ?$$

Euler

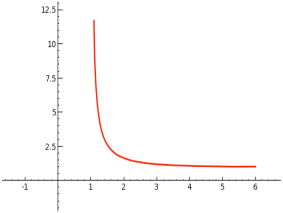
Die Zetafunktion

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Euler

Die Zetafunktion

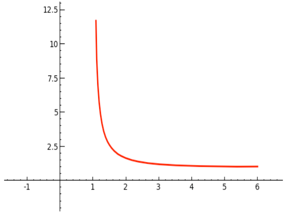
$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$



- $\zeta(x)$ ist für $x > 1$ eine "schöne" Funktion (siehe Bild)
- $\zeta(x)$ hat für $x = 1$ eine Singularität (Pol 1. Ordnung)

Die Zetafunktion

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$



- $\zeta(x)$ ist für $x > 1$ eine "schöne" Funktion (siehe Bild)
- $\zeta(x)$ hat für $x = 1$ eine Singularität (Pol 1. Ordnung)
- Euler berechnet die Werte $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\ldots$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},\ \cdots$$

Euler

Produktdarstellung der Zetafunktion

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{-x}} \cdot \frac{1}{1-3^{-x}} \cdot \frac{1}{1-5^{-x}} \cdot \frac{1}{1-7^{-x}} \cdot \ldots$$

$$= \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{1-p^{-x}}$$

Beobachtung

Euler

Produktdarstellung der Zetafunktion

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{-x}} \cdot \frac{1}{1-3^{-x}} \cdot \frac{1}{1-5^{-x}} \cdot \frac{1}{1-7^{-x}} \cdot \ldots$$

$$= \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{1-p^{-x}}$$

Beobachtung

- Die Eulersche Produktentwicklung ist gleichbedeutend damit, dass jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellbar ist.

Euler

Produktdarstellung der Zetafunktion

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{-x}} \cdot \frac{1}{1-3^{-x}} \cdot \frac{1}{1-5^{-x}} \cdot \frac{1}{1-7^{-x}} \cdot \ldots$$
$$= \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{1-p^{-x}}$$

Beobachtung

- Die Eulersche Produktentwicklung ist gleichbedeutend damit, dass jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellbar ist.
- Der Pol erster Ordnung bei $x = 1$ ist gleichbedeutend damit, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Funktionalgleichung der Zetafunktion

$$\pi^{-x/2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\zeta(x) = \pi^{-(1-x)/2}\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\zeta(1-x)$$

d.h. der Graph der Funktion

$$\pi^{-x/2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\zeta(x)$$

ist spiegelsymmetrisch zur Achse $x = 1/2$.

Euler

Einerseits

Setze $x = 2$ in die Funktionalgleichung ein

$$\zeta(-1) = -2^{-1}\,\pi^{-2}\zeta(2) = -\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

Euler

Einerseits

Setze $x = 2$ in die Funktionalgleichung ein

$$\zeta(-1) = -2^{-1}\pi^{-2}\zeta(2) = -\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

Andererseits

Setze formal $x = -1$ in die Reihendarstellung ein

$$\zeta(-1) = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \cdots$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

Euler

Einerseits

Setze $x = 2$ in die Funktionalgleichung ein

$$\zeta(-1) = -2^{-1}\pi^{-2}\zeta(2) = -\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

Andererseits

Setze formal $x = -1$ in die Reihendarstellung ein

$$\zeta(-1) = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \cdots$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

Vergleich

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12}$$

Mathematik: Schweiz – Berlin Geschichte und Gegenwart

Jürg Kramer

Geschichte

Euler

Gegenwart

GRK 870

GRK 1339

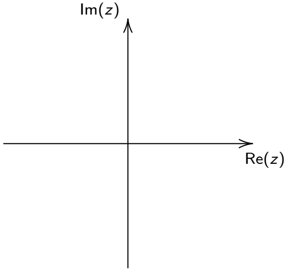
Berlin Mathematical School

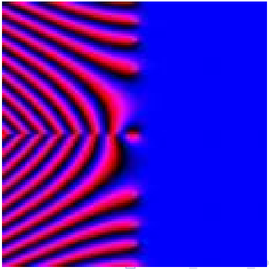
Komplexwertigkeit

Man kann $\zeta(x)$ auch als komplexwertige Funktion der komplexen Variablen

$$z = x + iy \quad (x = \mathrm{Re}(z),\ y = \mathrm{Im}(z))$$

auffassen. Sowohl Definitions- als auch Wertebereich sind dann reell 2-dimensional.





Milleniumsproblem

Riemannsche Vermutung:

Die Nullstellen der Zetafunktion liegen auf der Geraden $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ mit Ausnahme von $z = -2, -4, -6, \ldots$

Mathematik: Schweiz – Berlin

Gegenwart

Gegenwart

Internationales Graduiertenkolleg (GRK 870)

Arithmetic and Geometry

Graduiertenkolleg (GRK 870)

uni | eth | zürich

Departement Mathematik, ETH Zürich

Mathematisches Institut, Uni Zürich

Institut für Mathematik, Humboldt Universität

Institut für Mathematik, Freie Universität

Graduiertenkolleg (GRK 870)

Mathematik: Schweiz – Berlin Geschichte und Gegenwart

Jürg Kramer

Geschichte

Euler

Gegenwart

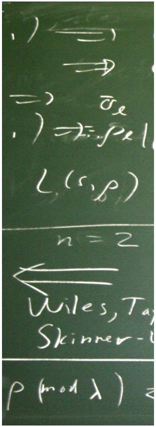
GRK 870

GRK 1339

Berlin Mathematical School

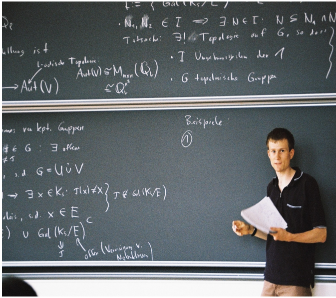
Forschungsgebiete

- Arithmetische Geometrie
- Zahlentheorie
- Differentialgeometrie
- Geometrische Analysis
- Algebraische Geometrie
- Komplexe Geometrie



Studienprogramm

- Spezialvorlesungen
- Forschungsseminare
- Kollegseminar
- Intensivkurse
- Sommerschulen
- Soft-Skill-Kurse



Sommerschulen

- Ascona (2004): Shimura Varieties, Lattices, Symmetric Spaces
- Chorin (2005): Arithmetic Geometry and Special Geometries
- Pleinfeld (2006): Differential, Hyperbolic, and Symplectic Geometry
- Alpbach (2007): Sato-Tate-Conjecture, Diophantine Geometry, Tropical Geometry
- Alpbach (2008): Arithmetic Geometry and Tropical Geometry

Graduiertenkolleg (GRK 870)

Alpbach 2008

Graduiertenkolleg (GRK 870)

Austausch von Doktoranden

- Doktoranden aus Berlin verbringen ein Semester in Zürich

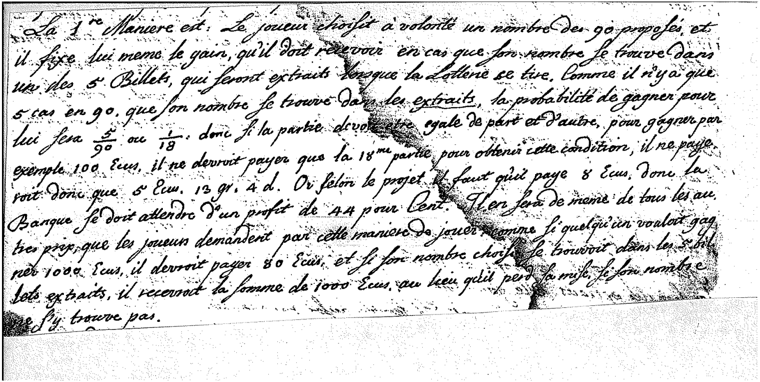
- . . . und umgekehrt

Internationales Graduiertenkolleg
(GRK 1339)

Stochastic Models of Complex Processes

Graduiertenkolleg (GRK 1339)

Euler



La 1re Maniere est: Le joueur choisit à volonté un nombre des 90 proposés et il fixe lui meme le gain, qu'il doit recevoir en cas que son nombre se trouve dans un des 5 Billets, qui seront extraits lorsque la Lotterie se tire. Comme il n'y a que 5 cas en 90. que son nombre se trouve dans les extraits, la probabilité de gagner pour lui sera $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$. donc si la partie devoit être egale de part et d'autre, pour gagner par exemple 100 Ecus, il ne devroit payer que la 18me partie pour obtenir cette condition, il ne payeroit donc que 5 Ecus. 13 gr. 4 d. Or selon le projet il faut qu'il paye 8 Ecus, donc la Banque se doit attendre d'un profit de 44 pour Cent. Il en sera de meme de tous les autres prix, que les joueurs demandent par cette maniere de jouer: comme si quelqu'un vouloit gagner 1000 Ecus, il devroit payer 80 Ecus, et si son nombre choisi se trouvoit dans les 5 billets extraits, il recevroit la somme de 1000 Ecus, au lieu qu'il perd sa mise, si son nombre ne s'y trouve pas.

Auszug eines Briefes von L. Euler an Friedrich den Großen zur "Lotterie Italienne"

Disentis 2008

Gegenwart

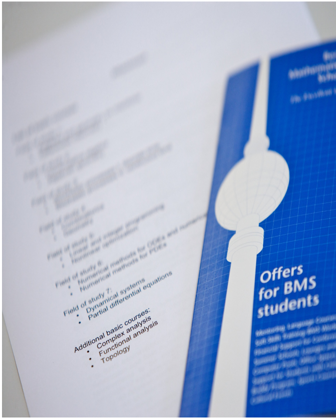
Berlin Mathematical School

eine gemeinsame Graduiertenschule von

Berlin Mathematical School

BMS ...

- eine Graduiertenschule für die gesamte Berliner Mathematik
- vom Bachelor bis zum Doktorat
- gegründet im Sommer 2006
- gefördert im Rahmen der Exzellenzinitiative von Bund und Ländern



BMS ...

- strukturiertes Studien-programm auf Englisch
- erstklassige Arbeitsumgebung
- Zugang zu Forschergruppen an FU, HU, TU
- Zugang zum Programm und Stipendien von
  - 4 DFG-Graduiertenkollegs
  - 2 International Max-Planck-Research Schools
  - DFG-Sonderforschungsbereich "Raum, Zeit, Materie"
  - DFG-Forschungszentrum MATHEON
  - ...

. . . und

- Friday Colloquia/Kovalevskaya Colloquia mit erstklassigen Mathematikerinnen/Mathematikern
- Unterstützung von weiblichen Studierenden und Studierenden mit Kindern
- Mentoring-Programm
- Soft-Skill-Training

Mathematik: Schweiz – Berlin Geschichte und Gegenwart

Jürg Kramer

Geschichte

Euler

Gegenwart

GRK 870

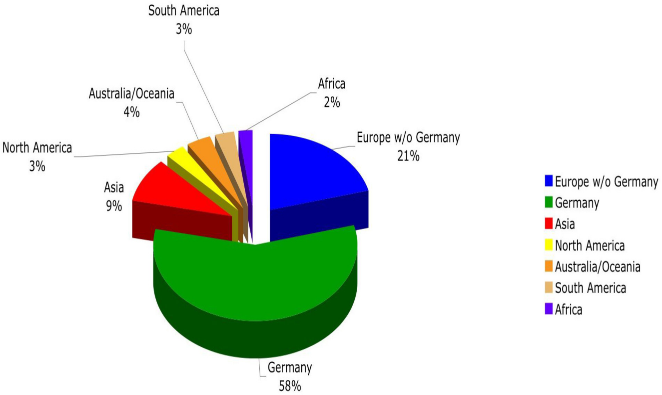
GRK 1339

Berlin Mathematical School

Studienstruktur

<table>
<tr><td colspan="3">Phase I</td><td colspan="5">Phase II</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>· · ·</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">basic courses</td><td colspan="6">advanced courses</td></tr>
<tr><td></td><td>qualifying exam</td><td colspan="4">thesis research</td></tr>
</table>

Internationalität



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!