Was ist (mathematische) Optimierung ?

Mathematische Optimierung beschäftigt sich mit Extremalwertaufgaben, d.h., eine (reellwertige) Funktion $f = f(x)$ soll über einer gegebenen Menge X extremal (sagen wir minimal) gemacht werden.

1. Ist $X = \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, sind solche Aufgaben aus der Schule wohlbekannt.

2. Ist X die Teilmenge aller Punkte des $\mathbb{R}^n$, die einem Gleichungssystem $g(x) = 0$ genügen, kennt man aus der Analysisvorlesung gewöhnlich die Lagrange Bedingung: Für extremales x gibt es ein λ, so dass $Df(x) = \lambda^T Dg(x)$, sofern der Rang von $Dg(x)$ maximal ist.

3. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ durch endlich viele lineare Ungleichungen definiert (also ein Polyeder) und ist f ebenfalls linear, hat man es mit einer linearen Optimierungaufgabe zu tun, die man sogar mit Hilfe vieler fertiger Programme loesen kann (sagen die Vertreiber).

Was macht diese Disziplin also interessant, insbesondere so sehr, dass man sich hierauf im Fachstudium spezialisieren kann und sollte ?

Grund 1
Solche Aufgaben treten überall in Theorie und Praxis auf, Beispiele:

1. In Approximationsaufgaben: Sei ein reelles Polynom

$$p(t) = x_0 + x_1 t + ... + x_n t^n$$

von maximalem Grade n gesucht, das eine gegebene Funktion $q = q(t)$ über einem Intervall T "am besten" approximiert. Dann soll zumeist eine Norm $f(x) = \|p - q\|$ durch passende Wahl von $x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{1+n}$ minimiert werden.
Ist etwa $f(x) = \sup_{t \in T} |p(t) - q(t)|$, erfordert die Lösung schon einige Arbeit (Tschebyschev-Approximation). Weitere Bedingungen an die Koeffizienten $g(x) \leq 0, h(x) = 0$ könnten hinzu kommen.

2. Im klassischen Problem nichlinearer Optimierung: Hier soll f bei Einhaltung endlich vieler (Neben-)Bedingungen $g_i(x) \leq 0, h_k(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$ minimiert werden; z.B. beschreibt f Kosten, die bei der Produktion eines

Warenbündels x entstehen.
Werden gewisse der Variablen x_j zuätzlich als ganzzahlig gefordert, erhält man eine *gemischt-ganzzahlige Aufgabe* (etwa *Optimierung eines Verkehrsflusses*, wenn man Einbahnstrassen-Schilder aufstellen muss), die neben analytischen Mitteln auch solche der diskreten Mathematik erfordert.

3. In Gleichgewichtsmodellen (sie spielen in ökonomischen Modellen, etwa Marktgleichgewichten unterschiedlicher Typen eine zentrale Rolle): Z.B. beschreiben

$$x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n$$

Strategien von n Spielern und

$$g_1(x), ..., g_n(x)$$

deren (aus irgendwelchen Spielregeln resultierende) Gewinne, wenn Spieler i jeweils x_i benutzt. Hat er keinen Einfluss auf die Strategiewahl der anderen Spieler, muss Spieler i zufrieden sein, wenn seine Wahl x_i die Gleichung

$$\max\{g_i(x_1, .., x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, ..., x_n) \mid \xi \in X_i\} = g_i(x)$$

erfüllt. Die linke Seite ist nie kleiner als die rechte. Deshalb müssen *alle* Spieler zufrieden sein (bzw. es besteht ein gewisses *Gleichgewicht*), wenn x die Summe

$$f(x) = \sum_i \max\{g_i(x_1, .., x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, ..., x_n) \mid \xi \in X_i\} - g_i(x)$$

minimiert und der Extremwert gerade Null ist.
Wir sind einerseits in der *Spieltheorie* gelandet und haben ausserdem eine i.a. nicht differenzierbare Funktion f zu minimieren *(nichtglatte Optimierung)*. Daneben ist es oft sinnvoll, derartige Lösungen x als Fixpunkt zu interpretieren.

4. In Extremalprinzipien in der Physik: Z.B. nimmt das Licht durch unterschiedliche Medien gerade den Weg, der es am schnellsten von A nach B kommen lässt. Man sucht dann eine Kurve $x = x(t)$, die den Weg des Lichtes abhängig von der Zeit t beschreibt, und $f(x)$ ist ein Integral, in das die Ableitung von x eingeht, etwa in der Form

$$f(x) = \int_0^T w(x(t), y(t), t)dt; \text{ wobei } y(t) = dx(t)/dt.$$

Aufgaben dieses Typs werden im Rahmen der *Variationsrechnung* behandelt, ein klassischer Teil der Analysis, in dem die Wurzeln der heutigen *Theorie von Extremalaufgaben in allgemeinen Räumen* liegen.

5. In Steuerungsproblemen: Z.B. soll eine Rakete (Massepunkt) weich auf dem Mond (kein Luftwiderstand) gelandet werden. Zur Zeit t habe sie die Höhe $h(t)$, die Geschwindigkeit $v(t)$ und erfahre die Beschleunigung $b(t) = dv(t)/dt$ (alles "nach oben gemessen"). Dabei ist $b(t) = -g_{mond} + r(t)$ und g_{mond} bezeichne die Gravitationskonstante des Mondes. Der Rest $r(t)$ sei die Beschleunigung in entgegengesetzte Richtung, die zur Vereinfachung direkt proportional zur momentan (für das Bremsen) eingesetzten Treibstoffmenge $u(t), 0 \leq u(t) \leq \mu$ sei (tatsächlich spielt hier auch die sich durch Treibstoffverbrauch verändernde Masse $M(t)$ der Rakete mit).
Der Flug wird dann durch die lineare Differentialgleichung

$$dh/dt = v,\ dv/dt = -g_{mond} + \rho u(t);\quad h(0) = h_0,\ v(0) = v_0$$

beschrieben. Gesucht wird die jeweils einzusetzende Treibstoffmenge $u(t)$, so dass die Funktion u noch hinreichend "vernünftig" ist (stückweise stetig mit nur endlich vielen Sprüngen im Interesse der Besatzung) und zu einer gewissen Zeit T die Endbedingungen $h(T) = 0$ und $v(T) = 0$ sichert. Zu minimieren ist etwa die Zeit $f(u, T) = T$ oder der dann verbrauchte Treibstoff $f(u, T) = \int_0^T u(t)dt$.
Allgemeine *Aufgaben der optimalen Steuerung* besitzen dann wie im Beispiel ein System von Differentialgleichungen mit Randbedingungen als Nebenbedingung

$$dx/dt = g(x, u, t),\ x(0) = x_0, x(T) = x_1,$$

und eine Funktion u wird (in einer gegebenen Funktionenmenge) so gesucht, dass ausserdem ein Integral $f(x, u) = \int_0^T h(x(t), u(t), t)dt$ minimal wird.

Gesuchte Funktionen können natürlich auch von mehreren Variablen abhängen (unter 4 und 5 kommen dann partielle Differentialgleichungen ins Spiel), und die Lösungen (oder Extremalwerte) gewisser Aufgaben können in komplexere Aufgaben eingehen, *Multi-level Probleme.* Dann spielt (wie auch unter 3) die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern der Aufgabe eine zentrale Rolle (*Parametrische Optimierung, Sensitivität*).

Grund 2
Für alle diese Aufgabentypen führen Fragen nach der Existenz von Lösungen und nach notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen zu interessanten analytischen Problemen.
Nicht zuletzt ist die Konzipierung und Umsetzung effektiver Lösungsmethoden auf der Grundlage *verwertbarer Optimalitätsbedingungen* eine permanente, zumeist nichttriviale Herausforderung und zugleich "konstruktive Mathematik".

Für weitere Informationen (siehe auch homepage) stehe ich gern zur Verfügung.

Mai 2002, Bernd Kummer