HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. B. KUMMER

(Nach-) Klausur Analysis I (WS 2010/11) , 5. 4. 2011
Achtung: Das ist die Version mit Lösungen und Hinweisen zum Korrigieren.

Vorbemerkungen: Wählen Sie aus den vorgegebenen Ausgaben **8** aus !
Tragen Sie am Ende in der folgenden Tabelle die Nummern der acht Aufgaben ein, die in Ihre Klausurbewertung eingehen sollen. Schreiben Sie auf jedes von ihnen abzugebende Blatt (auch dieses) ihre Matrikelnummer !

Matrikelnummer:

Aufgabe								
Punkte								

Jede Aufgabe bringt maximal 5 Punkte. Viel Erfolg !

Aufgabe 1: (Metrischer Raum $\mathbb{R}$) *5 Punkte*

Es sei M die Menge aller rationalen Zahlen des Intervalls $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$.
Ist M im metrischen Raum $\mathbb{R}$ (mit "normaler" Betragsmetrik)
(2P) offen
(2P) abgeschlossen
(1P) kompakt ?
(Kurzbegründung)

Aufgabe 2: (Konvergenz in metrischen Räumen) *5 Punkte*

Eine Folge $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ sei konvergent mit Grenzwert $\bar{x}$ im metrischen Raum (X, d). Eine weitere Folge $\{y_n\}_{n=1,2,...}$ entstehe aus der ersten durch beliebiges Umsortieren ihrer Elemente x_n.
Warum konvergiert auch die zweite Folge gegen $\bar{x}$? (5 P)

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein n_1 so dass $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$ für alle $n > n_1$. Die ersten n_1 Elemente der Ausgangsfolge $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ haben jetzt irgendwelche Indizes $m_1, m_2, ..., m_{n_1}$ in der neuen Folge. Mit einem beliebigen Index n_2 so dass n_2 goesser (oder gleich) als alle $m_1, m_2, ..., m_{n_1}$ ist, folgt so wieder $d(y_n, \bar{x}) < \varepsilon$ für alle $n > n_2$.

Aufgabe 3: (Grenzwertberechnungen) *5 Punkte*

Welche der angegebenen reellen Folgen $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ sind konvergent in $\mathbb{R}$? Begründen Sie ihre Antwort. (Gegebenenfalls können Sie einen Limes durch einen $f(x)/g(x)$-Limes ersetzen und die Regel von l'Hospital anwenden.)

a) $x_n := (-1)^n \, n \sin(1/n^2)$ (1 P)

(*Hinweis: Es kann hilfreich sein,* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ *zu betrachten.*)

b) $x_n := \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$ (1 P)

c) $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (2 P)

d) $x_n = \sqrt{2n+6} - \sqrt{2n+1/n}$ (1 P)

a)
Da $n\sin(1/n^2) = (1/n)\frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2}$ und $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ (Vorles. oder l' Hospital) , konvergiert die Folge unabhängig von der Vorzeichenwahl gegen Null.
b)
$\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n} = \frac{\sqrt{n^2(1-1/n+1/n^2)}}{n} = \sqrt{1-1/n+1/n^2} \to 1$.

c) Divergenz (indirekt): Wäre die Reihe konvergent, so auch die harmonische Reihe mit kleineren Summanden. Diese ist aber bekanntlich divergent.

d)
$x_n = \sqrt{2n+6} - \sqrt{2n+1/n}$

$$x_n = \frac{(2n+6)-(2n+1/n)}{\sqrt{2n+6}+\sqrt{2n+1/n}} = \frac{6-1/n}{\sqrt{2n+6}+\sqrt{2n+1/n}} \to 0.$$

Aufgabe 4: (Differenzierbarkeit) *5 Punkte*

Es sei f eine reelle (nicht notwendig stetige) Funktionen mit $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| \leq 1$.
Man bilde u als $u(x) = x^2 f(x)$ und v als $v(x) = xf(x)$.

a) Warum ist u im Nullpunkt $\bar{x} = 0$ differenzierbar ? (3 P)

b) Warum wird dies für v im allgemeinen falsch ? (2 P)
(*Hinweis: Geben Sie ein Gegenbeispiel an.*)

a)
Es gilt für $x \neq 0$, $|\frac{u(x)-u(0)}{x}| \leq |x| * 1$ im ersten Fall. Also ist der Limes Null fuer jede Folge $x_n \to 0$.
b) Jetzt gilt für $x \neq 0$, $|\frac{v(x)-v(0)}{x}| = |f(x)|$. Mit Folgen $x_n \to 0$ so dass $|f(x_n)| = 1$ und $y_n \to 0$ so dass $|f(y_n)| = 0$ (die es z.B. bei der Dirichlet-Funktion gibt) erhält man also unterschiedliche Limes.

Aufgabe 5: (Stetigkeit) *5 Punkte*

Warum ist die relle Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(x) = \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ nicht stetig in $\bar{x} = 0$?

Man kann eine Folge $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ finden mit $\sin(1/x_n) = 1$, z.B. $x_n = (\pi/2 + 2n\pi)^{-1}$ und ebenso eine Folge $y_n \to 0$ mit $\sin(1/y_n) = 0$, z.B. $x_n = (2n\pi)^{-1}$. Also gibt es keinen (einheitlichen) Limes von $f(x)$ für alle Nullfolgen von x.

Aufgabe 6: (Extremwertberechnung) *5 Punkte*

Man zerlege den Winkel $w = \frac{\pi}{2}$ in zwei positive Teile x und y. Für welche Zerlegung ist dann $\sin x + \sin y$ am grössten ?

$$f = \sin x + \sin(w - x)$$

$$f' = \cos x - \cos(w-x) = 0; \quad x,\ w-x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist der cosinus monoton fallend. Also kann $\cos x = \cos(w-x)$ nur gelten, wenn $x = w - x$, also wenn $x = y = \frac{\pi}{4}$. (bis hierhin 3 P).
Wegen

$$f'' = -\sin x \ - [\ -(-1)\sin(w-x)\ ] = -\sin x - \sin(w-x) < 0$$

haben wir ein Maximum, weil der Sinus in $(0, \frac{\pi}{2})$ positiv ist.

Aufgabe 7: (Eindeutige Lösbarkeit) *5 Punkte*

a) Warum hat für jedes reelle c und $f(x) = x + \arctan x$ die Gleichung $f(x) = c$ stets eine eindeutige Loesung $x = x(c) \in \mathbb{R}$? (3 P)

b) Wie verhält sich die Lösung fuer $c \to \infty,\ c \to -\infty$? (2 P)

a)
Wegen $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} \geq 1$ (s. Vorl) gilt nach MWSatz $f(y) - f(0) \geq y \forall y > 0$ und $f(y) - f(0) \leq y \forall y < 0$. Damit nimmt die stetige Funktion f jeden reellen Wert an. Da sie monoton ist $(f' > 0)$ wird jeder Wert nur einmal angenommen.
b)
Da $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist und $x(c) = c - \arctan x$ gilt, muss $x(c) \to \infty$ im Falle $c \to \infty$ gelten und $x(c) \to -\infty$ im Falle $c \to -\infty$.

Aufgabe 8: (Taylor/Potenz - Reihe) *5 Punkte*

Man betrachte die Reihe $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

a) Warum konvergiert die Reihe für jedes reelle x ? (2 P)

b) Warum ist der Limes gerade $\cosh(x)$? (3 P)

a) Quotientenkriterium (am einfachsten) oder Wurzelkriterium (haben wir als Übaufg. behandelt) reicht für absol. Konvergenz.
b) 1 P Die Ableitungen von $\cosh(x)$ sind abwechselnd $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ (Vorlesung) mit Werten 1 bzw. 0 in $x = 0$.
1 P Damit ist die obige Reihe die Taylor-Reihe zu $\cosh(x)$, entwickelt in $a = x_0 = 0$.
1 P Sie konvergiert gegen $\cosh(x)$, weil für jedes feste x und $\theta \in (0, x)$ die Ableitung $f^{(n+1)}(\theta)$ (als stetige Funktion $\sinh(\theta)$ bzw. $\cosh(\theta)$) im Restglied $R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ im Betrag beschränkt bleibt und $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$; also $\lim_{n\to\infty}\ R_n(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 9: (Komplexe Zahlen) *5 Punkte*

Berechnen Sie die komplexen Ausdrücke:

a) $z = \frac{1-i}{6+5i}$ (1 P)

b) $z = \sqrt[4]{4}$ (2 P)

c) $z = \cos(i)$ (2 P)

(*Hinweis: Die obige Reihe für* $\cosh(x)$ *darf benutzt werden*).

$$a)\quad \frac{1-i}{6+5i} = \frac{(1-i)\ (6-5i)}{(6+5i)(6-5i)} = \frac{6-5-i(6+5)}{36+25} = \frac{1+11\ i}{61}.$$

b)

$$z = \sqrt[4]{4},\ polar\ \phi = \pi/2; \quad r := |z| = \sqrt{4} = 2$$

$$z = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}\ (\ \cos(\frac{\phi}{4} + \frac{2k\pi}{4}) + i\ \sin(\frac{\phi}{4} + \frac{2k\pi}{4})\ ), \quad k = 0,1,2,3.$$

c) Nach Def. als Reihe ist

$$\cos(i) = 1 - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^4}{4!} - \frac{i^6}{6!} \ ... \ = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} = \cosh(1) = \frac{1}{2}(e^1 + e^{-1}).$$

Aufgabe 10: (Stammfunktionen) *5 Punkte*

Berechnen Sie Stammfunktionen zu

a) $x\cos(3x)$ (3 P)

b) x^2e^x für $x > 0$. (2 P)

$$a)\ u' = \cos(3x); \int x\cos(3x)\ dx = x\frac{1}{3}\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)\ dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x).$$

ProbeAbl (für uns): $\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{3}3x\cos(3x) - \frac{1}{9}3\sin(3x) = x\cos(3x)$ ok.

$$b) \qquad u' = e^x; v = x^2$$

$$\int x^2e^x\ dx = x^2e^x \ - \int 2xe^x\ dx.$$

Bis hierhin 1 Punkt.

$$nun \qquad u' = e^x; \int xe^x\ dx = xe^x \ - \int e^x\ dx = xe^x \ - e^x.$$

$$also \qquad \int x^2e^x\ dx = x^2e^x - 2xe^x \ + 2e^x.$$

ProbeAbl (für uns): $(x^2e^x)' = 2xe^x + x^2e^x$, $\quad -2(xe^x)' = -2e^x - 2xe^x$, $\quad (2e^x)' = 2e^x$ ok.