Übungen, Analysis I (ohne Stern), WiSem 2010/11

Bernd Kummer

8. Serie, bis Mo, 13. 12. 10 ; 15.15 Uhr (in Neumann II, 4. Etage links)

1.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und gelte $f(a) < y < f(b)$ für gegebene relle $a < b$ und y. Beweisen Sie (mittels Intervallschachtelung): Dann existiert ein x zwischen a und b mit $f(x) = y$. (4 P)

2.
Begründen Sie mittels Wurzelkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ mit jedem $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent ist. Dazu dürfen Sie benutzen, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{|y^n|}{n!} = 0$ (s. Vorlesung). (4 P)

3.
Warum liefert das Wurzelkriterium für die beiden Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mit reellen x und a_n stets dasselbe Ergebnis ?
Begründen Sie jeden auftretenden Einzel-Limes, den Sie benutzen. (4 P)

4 (Zusatz).
Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n}$? (2 P)

sum normal = 4+4+4 P; dazu 2 Zusatzpunkte. Viel Spass.

Wie stets: Name des Übungsleiters bitte mit angeben ! Die Zeit der Übung ist auch von Nutzen, falls ein Üb-Leiter 2 Übungen hat.
Abgabe als Gruppe (2 oder 3 Studenten/innen) ist möglich und erwünscht. Von 5 hat keiner geredet.

aktualisierter Stand der Vorlesung:
1. Woche Mi 20.10.
   nat. Zahlen 0,1,2,... als bekannt angenommen.
   Mengen:İnklusion, Vereinig, Durchschn. Diff., Produkt
   Funktion f: A to B surjektiv, injektiv, bijektiv; Inverse Funktion g zu f.
   gleiche Maechtigkeit per Bijektion.
   gezeigt fuer N und Q (posit.) per DiagonalMeth.

2. Woche 25. und 27. 10.
   Gleiche Maechtigkeit von Q und N.

abzaehlbar , Intervall (-1, 1) und Gerade, Strecke-Quadrat. Reelle Zahlen nicht abzaehlbar per Dez.-Darstellung. Hilberts Hotel, Aequivalenzrelation, Ordnungsrelation, Wohlordnung und vollst. Induktion.

Beispiele zu Indukt. Bernoulli-Ungl. (1 + x)$^n >= 1 + nx\ fuer\ (x > -1)$,

Anzahl Teilmengen, Anzahl Permutat, 6 aus 49 und Binomialkoeff. n ueber k Pascalsches Dreieck

Ganze Zahlen als Aequivalenzklassen geordneter Paaren nat. Zahlen

3. Woche 1. 11. und 3. 11.

Kurze Wiederh. und Interpretation von (m,n) als m-n.

Rationale Zahlen ueber Paare und multipl. Verknuepfung; analog zu ganzen Zahlen. Satz Wurzel 2 nicht rational (zugleich typisch fuer indirekten Beweis).

Reelle Zahlen als Dedekind Schnitt r=(A,B). Supremum und Intervallschachtelung. Noch nachtragen: Infimum und inf M analog zu Supremum und sup M nun fuer untere Schranken.

Zahlenkoerper und Beispiel K = { 0, 1 }.

Komplexe Zahlen z = x + i y. Wir koennen sie jetzt addieren, multipliz. und 1/(x+iy) ausrechnen.

4. Woche 8. 11. und 10. 11.

Bezeichnungen fuer z=x+iy: Realteil x, Imaginaerteil y, imaginaere Einheit i, Def. konj. komplex (Spiegelung an reeller Achse), Betrag.

Weiter mit PolarKoordinaten, Potenzen und Wurzeln.

Haben aber hier noch nicht die Eulersche Form. Die kommt erst, wenn wir die Reihen fuer den schulmaessig am Kreis definierten reellen sin und cos ueber Taylor- und Potenzreihen haben. Bisher kennen wir e nicht.

Konvergente/divergente (Zahlen-) Folgen.

Summe, Produkt, Quotient, Beispiele, Einschachteln, Konvergenz monotoner beschrnkter Folgen.

5. Woche 15. 11. und 17. 11.

Konvergente/divergente Folgen.

Satz von Bolzano-Weierstrass, metrischer Raum, Beispiele, Cauchy-Folgen, Stetigkeit (ueber Folgen und (eps,delta)), Konvergenz von Cauchy-Folgen in R, offene, abgeschlossene (als Komplement von offenen Mengen und mittels Konvergenz charakterisiert) und (Folgen-) kompakte Mengen. Satz von Weierstrass (Maxima). Def. gleichm. Stetigkeit.

6. Woche 22. 11. und 24. 11.

Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Ueberdeckungssatz (Beweis nur fuer X=R) und Banach's Fixpunktsatz;

Kurze Wiederholung der zentralen Begriffe und Schwerpunkte. Reelle Zahlen: Supremum und Intervallschachtelung. komplexe Zahlen: Rechenregeln und Polarkoordinaten, Wurzeln und Potenzen.

(unendl.) Folgen in R und im metrischen Raum X (Menge mit Metrik) (was ist eine Metrik d ?). In R: Monotonie und Beschrnktheit, beschrnkte Folgen und konv. Teilfolgen, Cauchy-Folgen (in R und X) Konvergenz von Cauchy-Folgen in R. (offene) Kugel Bo(x, eps)
Stetigkeit in x aus X und auf einer Menge. Spezielle Mengen in X: offen, abgeschlossen, kompakt.

Besonderheiten kompakter Mengen: Existenz des Maximums fuer stetige, reellwertige f. Kompakt in R bedeutet beschraenkt und abgeschlossen. Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Offene Ueberdeckung kompakter Mengen (Heine-Borel-Beweis nur fuer X=R),

Kontraktiv und vollstaendig; Banach's Fixpunktsatz.

Reihen als spezielle Folgen.

7. Woche 29. 11. und 1. 12. Die Zahl e als Limes und Summe. Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen (mit reellen Gliedern) Saetze: Leibnitz-Kriterium fuer alternierende Reihen (dick betont, dass dies nur eine hinreichende Bedingung fuer Konvergenz ist, obwohl es oft "Kriterium"heisst !!). Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz. Absolut konvergente Reihen darf man Umsortieren; Summe invariant.

8. Woche 6. 12. und 8. 12. Umordnung einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe. Wurzel- und Quotientenkriterium und Potenzreihen. Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen, Stetige reelle Funktionen und ihre Inversen.